



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
UNIDADE ACADÊMICA DO CABO DE SANTO AGOSTINHO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA FÍSICA

Silvana Paola Moreira Ifrán

**Propagação de impulsos neurais em cadeias de neurônios em regime de excitação
supra-limiar**

Cabo de Santo Agostinho - PE

2025

Silvana Paola Moreira Ifrán

Propagação de impulsos neurais em cadeias de neurônios em regime de excitação supra-limiar

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Física, Unidade Acadêmica do Cabo de Santo Agostinho, da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Física.

Área de Concentração: Optoeletrônica

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Vladimir Barreiro DeGiorgi

Coorientador: Prof. Dr. Marcos Cesar Santos Oriá

Cabo de Santo Agostinho - PE

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Biblioteca da UACSA, Cabo de Santo Agostinho - PE, Brasil.
Bibliotecária – Rosimeri Gomes Couto – CRB-4/1395

I23p Ifrán, Silvana Paola Moreira.
 Propagação de impulsos neurais em cadeia de neurônios em
 regime de excitação supra-limiar. / Silvana Paola Moreira Ifrán. –
 Cabo de Santo Agostinho, 2025.
 163 f. : il.

 Orientador: Sérgio Vladimir Barreiro DeGiorgi.
 Coorientador: Marcos César Santos Oriá.
 Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Engenharia
 Física) – Universidade Federal Rural de Pernambuco. Unidade
 Acadêmica do Cabo de Santo Agostinho, 2025.
 Inclui referência.
 Inclui apêndice.

 1. Redes neuronais. 2. Hindmarsh-Rose. 3. Acoplamento
 unidirecional. 4. Sincronização. I. DeGiorgi, Sérgio Vladimir Barreiro,
 orient. II. Oriá, Marcos César Santos, coorient. III. Título.

CDD 620.5

SILVANA PAOLA MOREIRA IFRÁN

Propagação de impulsos neurais em cadeias de neurônios em regime de excitação supra-limiar.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Física da Unidade Acadêmica do Cabo de Santo Agostinho da Universidade Federal Rural de Pernambuco para obtenção do título de Mestre em Engenharia Física.

Aprovada em: 29 de Julho de 2025.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Sérgio Vladimir Barreiro DeGiorgi – UFRPE

Orientador

Prof. Dr. Pablo Ariel Monzón Rangeloff - UDELAR

Examinador externo

Martine Chevrollier – UFRPE

Examinador interno

Dedico este trabalho à memória da mulher da minha vida.

Mãe, isso aqui é nosso.

AGRADECIMENTOS

Preciso começar agradecendo à minha mãe — sua passagem por este mundo e pela minha vida será sempre uma das lembranças mais lindas que guardo comigo.

Agradeço à minha gêmea Andrea, por ter sido minha companheira nos melhores e piores momentos; por estudar comigo em eternas videoconferências com músicas de duvidosa origem — suas playlists salvaram meus dias. Obrigada por confiar em mim, na minha capacidade e nas minhas ideias mais loucas. Não imagino minha vida sem você, o orgulho que eu tenho de você só no é maior que a minha admiração.

À minha madrinha Sandra por me ajudar sempre e confiar em mim. Ao meu tio Eduardo por torcer para que tudo desse certo (em parte para ter onde passar férias na praia — eu sei). À minha eterna vizinha Julay, por me mandar fotos dos seus animais resgatados, que me fazem acreditar que ainda resta um pouquinho de bondade no mundo.

Quero agradecer também às amigas e amigos que torceram por mim desde o início — aos novos e aos antigos: Nando, Ro, Boli, Sabri, Lu, Victor, Luana, Allan, Felipe, Brenda, e especialmente ao Gil, por ser um companheiro extraordinário, se cheguei até aqui em parte foi por você. Obrigada pela paciência, pelo carinho, pelas lágrimas, pelos abraços, pelas risadas — e, acima de tudo, pela confiança. Vou levar você comigo para sempre.

Agradeço ao meu orientador, Sérgio, pela oportunidade e pela liberdade de escolher novos caminhos. Um agradecimento especial ao meu coorientador, Oriá, por ter sido o apoio acadêmico necessário — sei que dei trabalho. Também à professora Amanda e ao professor Weliton, cujas contribuições enriqueceram significativamente este trabalho.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Física da Unidade Acadêmica do Cabo de Santo Agostinho da Universidade Federal Rural de Pernambuco, minha gratidão pela oportunidade de chegar até aqui, vindo de tão longe.

E, por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro durante o curso.

“Decir lo que pasa, lo que se ve, lo que se piensa. Eso es poesía.”

(Circe Maia)

“Toda a história da sociedade até hoje é a história da luta de classes.

A educação é uma das trincheiras dessa luta.”

(Friedrich Engels)

RESUMO

Nesta dissertação investigou-se a propagação de impulsos neurais em cadeias de neurônios modelados pelas equações de Hindmarsh-Rose e submetidos a correntes externas supra-limíares. Tipicamente foram consideradas redes com cinco neurônios com diferentes tipos de acoplamento, seja elétrico ou químico, em configuração tanto unidimensional quanto bidimensional. Também foi analisada a propagação desses impulsos variando-se a intensidade do ruído adicionado ao sinal de entrada da cadeia. Os objetivos são analisar os mecanismos de sincronização parcial; a defasagem temporal; e a coerência oscilatória, induzidos pela topologia das conexões e pela intensidade do acoplamento. As simulações numéricas mostram que o acoplamento unidirecional, mesmo na ausência de ruído, é capaz de induzir uma propagação coerente de atividade neural ao longo da cadeia, caracterizada por padrões de disparo com defasagem crescente. A presença de estruturas em loops revelou padrões de retroalimentação que favorecem a persistência da atividade oscilatória, especialmente no regime de acoplamento químico. O ruído, por sua vez, modifica significativamente a coerência temporal da rede, podendo tanto induzir quanto perturbar a sincronização, a depender do nível do ruído. As análises de relações de fase revelaram comportamentos complexos, com sincronizações transitórias, defasagens sistemáticas e efeitos de neurônios específicos na propagação da atividade elétrica.

Palavras-chave: redes neurais; acoplamento unidirecional; sincronização; ruído.

ABSTRACT

This dissertation investigated the propagation of neural impulses in chains of neurons modeled by the Hindmarsh-Rose equations and subjected to suprathreshold external currents. Typically, networks with five neurons and different types of coupling, either electrical or chemical, in both one-dimensional and two-dimensional configurations, were considered. The propagation of these impulses was also analyzed by varying the intensity of the noise added to the input signal of the chain. The objectives are to analyze the mechanisms of partial synchronization, time lag, and oscillatory coherence induced by the topology of the connections and the intensity of the coupling. Numerical simulations show that unidirectional coupling, even in the absence of noise, is capable of inducing coherent propagation of neural activity along the chain, characterized by firing patterns with increasing phase lag. The presence of loop structures revealed feedback patterns that favor the persistence of oscillatory activity, especially in the chemical coupling regime. Noise, in turn, significantly modifies the temporal coherence of the network, being able to either induce or disturb synchronization, depending on its level. Phase relation analyses revealed complex behaviors, with transient synchronizations, systematic phase shifts, and effects of specific neurons on the propagation of electrical activity.

Keywords: Neural networks; Hindmarsh-Rose model; Unidirectional coupling; Synchronization; Noise.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Estrutura de um neurônio	20
Figura 2 – Movimento dos íons K^+	21
Figura 3 – Limiar de disparo de um neurônio	23
Figura 4 – Serie temporal de um neurônio com $I = 1.35$	29
Figura 5 – Comportamento das variáveis $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ de um neurônio, solução do modelo HR (Eq. 3.1), com os parâmetros da Tabela 1.	30
Figura 6 – Serie temporal para corrente perto do limiar de disparo	31
Figura 7 – Espaço de variáveis xz para corrente perto do limiar de disparo	31
Figura 8 – Serie temporal para corrente levemente acima do limiar de disparo	32
Figura 9 – Espaço de variáveis xz para corrente acima do limiar de disparo	32
Figura 10 – Serie temporal para corrente caótica	33
Figura 11 – Espaço de variáveis xz para corrente caótica	33
Figura 12 – Serie temporal para corrente acima da caótica	34
Figura 13 – Espaço de variáveis xz para corrente acima da caótica	34
Figura 14 – Acoplamento unidirecional de dois neurônios	36
Figura 15 – Séries temporais dos dois neurônios com acoplamento elétrico $g_e = 1.0$, $I_0 =$ 1.35 e $g_c = 0.0$ - 1D	37
Figura 16 – Séries temporais dos dois neurônios com acoplamento elétrico $g_e = 0.1$, $I_0 =$ 1.35 e $g_c = 0.0$ - 1D	37
Figura 17 – Séries temporais dos dois neurônios com acoplamento químico $g_c = 1.0$, $I_0 =$ 1.35 e $g_e = 0.0$ - 1D	38
Figura 18 – Séries temporais dos dois neurônios com acoplamento químico $g_c = 0.1$, $I_0 =$ 1.35 e $g_e = 0.0$ - 1D	39
Figura 19 – Acoplamento unidirecional de cinco neurônios	40
Figura 20 – Séries temporais dos cinco neurônios com acoplamento elétrico $g_e = 1.0$, $I_0 =$ 1.35 e $g_c = 0.0$ - 1D	42
Figura 21 – Séries temporais dos cinco neurônios com acoplamento elétrico $g_e = 0.1$, $I_0 =$ 1.35 e $g_c = 0.0$ - 1D	42
Figura 22 – Relações de fase entre os pares de neurônios com $g_e = 1.0$, $I_0 = 1.35$ e $g_c = 0.0$ - 1D	43
Figura 23 – Relações de fase entre os pares de neurônios com $g_e = 0.1$, $I_0 = 1.35$ e $g_c = 0.0$ - 1D	43

Figura 24 – Séries temporais dos cinco neurônios com acoplamento químico $g_c = 1.0$, $I_0 = 1.35$ e $g_e = 0.0$ - 1D	44
Figura 25 – Séries temporais dos cinco neurônios com acoplamento químico $g_c = 0.1$, $I_0 = 1.35$ e $g_e = 0.0$ - 1D	45
Figura 26 – Relações de fase entre os pares de neurônios com $g_c = 1.0$, $I_0 = 1.35$ e $g_e = 0.0$ - 1D	45
Figura 27 – Relações de fase entre os pares de neurônios com $g_c = 0.1$, $I_0 = 1.35$ e $g_e = 0.0$ - 1D	46
Figura 28 – Topologia bidimensional com cinco neurônios na cadeia.	47
Figura 29 – Séries temporais dos cinco neurônios com acoplamento elétrico $g_e = 1.0$ - 2D . .	47
Figura 30 – Séries temporais dos cinco neurônios com acoplamento elétrico $g_e = 0.1$ - 2D . .	48
Figura 31 – Relações de fase entre os pares de neurônios com $g_e = 1.0$ - 2D	49
Figura 32 – Relações de fase entre os pares de neurônios com $g_e = 0.1$ - 2D	49
Figura 33 – Séries temporais dos cinco neurônios com acoplamento químico $g_c = 1.0$ - 2D . .	50
Figura 34 – Séries temporais dos cinco neurônios com acoplamento químico $g_c = 0.1$ - 2D . .	51
Figura 35 – Relações de fase entre os pares de neurônios com $g_c = 1.0$ - 2D	51
Figura 36 – Relações de fase entre os pares de neurônios com $g_c = 0.1$ - 2D	52
Figura 37 – Série temporal e espectro de frequência de um neurônio com $I_0 = 1.35$ e $\beta = 1.0 \cdot 10^0$	54
Figura 38 – Série temporal e espectro de frequência de um neurônio com $I_0 = 1.35$ e $\beta = 1.0 \cdot 10^{-1}$	54
Figura 39 – Série temporal e espectro de frequência de um neurônio com $I_0 = 1.35$ e $\beta = 1.0 \cdot 10^{-2}$	55
Figura 40 – Série temporal e espectro de frequência de um neurônio com $I_0 = 1.35$ e $\beta = 1.0 \cdot 10^{-3}$	55
Figura 41 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 1.0$ e $\beta = 0.0$ - 1D . .	58
Figura 42 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 1.0$ e $\beta = 10^{-3}$ - 1D .	59
Figura 43 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 1.0$ e $\beta = 10^{-2}$ - 1D .	59
Figura 44 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 1.0$ e $\beta = 10^{-1}$ - 1D .	60
Figura 45 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 1.0$ e $\beta = 10^0$ - 1D . .	60
Figura 46 – SNR em função do β para cada neurônio com $g_e = 1.0$ - 1D	61
Figura 47 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 0.1$ e $\beta = 0.0$ - 1D . .	62
Figura 48 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 0.1$ e $\beta = 1.0 \cdot 10^{-3}$ - 1D	63

Figura 49 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 0.1$ e $\beta = 1.0 \cdot 10^{-2}$ -	
1D	64
Figura 50 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 0.1$ e $\beta = 1.0 \cdot 10^{-1}$ -	
1D	64
Figura 51 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 0.1$ e $\beta = 10^0$ - 1D . .	65
Figura 52 – SNR em função do β para cada neurônio com $g_e = 0.1$ - 1D	66
Figura 53 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_c = 1.0$ e $\beta = 0.0$ - 1D . .	67
Figura 54 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_c = 1.0$ e $\beta = 1.0 \cdot 10^{-3}$ -	
1D	68
Figura 55 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_c = 1.0$ e $\beta = 10^{-2}$ - 1D .	68
Figura 56 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_c = 1.0$ e $\beta = 10^{-1}$ - 1D .	69
Figura 57 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_c = 1.0$ e $\beta = 10^0$ - 1D . .	70
Figura 58 – SNR em função do β para cada neurônio com $g_c = 1.0$ - 1D	71
Figura 59 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_c = 1.0$ e $\beta = 0.0$ - 1D . .	72
Figura 60 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_c = 1.0$ e $\beta = 1.0 \cdot 10^{-3}$ -	
1D	73
Figura 61 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_c = 1.0$ e $\beta = 10^{-2}$ - 1D .	73
Figura 62 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_c = 1.0$ e $\beta = 10^{-1}$ - 1D .	74
Figura 63 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_c = 1.0$ e $\beta = 10^0$ - 1D . .	74
Figura 64 – SNR em função do β para cada neurônio com $g_c = 1.0$ - 1D	75
Figura 65 – Topologia bidimensional com cinco neurônios na cadeia.	76
Figura 66 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 1.0$ e $\beta = 0.0$ - 2D . .	77
Figura 67 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 1.0$ e $\beta = 10^{-3}$ - 2D .	77
Figura 68 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 1.0$ e $\beta = 10^{-2}$ - 2D .	78
Figura 69 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 1.0$ e $\beta = 10^{-1}$ - 2D .	78
Figura 70 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 1.0$ e $\beta = 10^0$ - 2D . .	79
Figura 71 – SNR em função do β para cada neurônio com $g_e = 1.0$ - 2D	79
Figura 72 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 0.1$ e $\beta = 0.0$ - 2D . .	81
Figura 73 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 0.1$ e $\beta = 1.0 \cdot 10^{-3}$ -	
2D	82
Figura 74 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 0.1$ e $\beta = 10^{-2}$ - 2D .	82
Figura 75 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 0.1$ e $\beta = 10^{-1}$ - 2D .	83
Figura 76 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 0.1$ e $\beta = 10^0$ - 2D . .	83
Figura 77 – SNR em função do β para cada neurônio com $g_e = 0.1$ - 2D	84

Figura 78 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_c = 1.0$ e $\beta = 0.0$ - 2D . .	85
Figura 79 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_c = 1.0$ e $\beta = 10^{-3}$ - 2D .	86
Figura 80 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_c = 1.0$ e $\beta = 10^{-2}$ - 2D .	86
Figura 81 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_c = 1.0$ e $\beta = 10^{-1}$ - 2D .	87
Figura 82 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_c = 1.0$ e $\beta = 10^0$ - 2D . .	88
Figura 83 – SNR em função do β para cada neurônio com $g_c = 1.0$ - 2D	89
Figura 84 – SNR em função do β para cada neurônio com $g_c = 1.0$ - 2D	89
Figura 85 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 0.1$ e $\beta = 0.0$ - 2D . .	90
Figura 86 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 0.1$ e $\beta = 10^{-3}$ - 2D .	91
Figura 87 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 0.1$ e $\beta = 10^{-2}$ - 2D .	91
Figura 88 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 0.1$ e $\beta = 10^{-1}$ - 2D .	92
Figura 89 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 0.1$ e $\beta = 10^0$ - 2D . .	92
Figura 90 – SNR em função do β para cada neurônio com $g_c = 0.1$ - 2D	93
Figura 91 – Correlação cruzada entre neurônio 1 e o 2	98
Figura 92 – Correlação cruzada entre neurônio 1 e o 3	98
Figura 93 – Correlação cruzada entre neurônio 1 e o 4	99
Figura 94 – Correlação cruzada entre neurônio 1 e o 5	99
Figura 95 – Correlação cruzada entre neurônios 2 e 3	100
Figura 96 – Correlação cruzada entre neurônios 3 e 4	100
Figura 97 – Correlação cruzada entre neurônios 4 e 5	101
Figura 98 – Correlação cruzada entre neurônio 1 e o 2	102
Figura 99 – Correlação cruzada entre neurônio 1 e o 3	103
Figura 100 – Correlação cruzada entre neurônio 1 e o 4	103
Figura 101 – Correlação cruzada entre neurônio 1 e o 5	104
Figura 102 – Correlação cruzada entre neurônios 2 e 3	104
Figura 103 – Correlação cruzada entre neurônios 3 e 4	105
Figura 104 – Correlação cruzada entre neurônios 4 e 5	105
Figura 105 – Correlação cruzada entre neurônio 1 e o 2	107
Figura 106 – Correlação cruzada entre neurônio 1 e o 3	108
Figura 107 – Correlação cruzada entre neurônio 1 e o 4	108
Figura 108 – Correlação cruzada entre neurônio 1 e o 5	109
Figura 109 – Correlação cruzada entre neurônios 2 e 3	109
Figura 110 – Correlação cruzada entre neurônios 3 e 4	110
Figura 111 – Correlação cruzada entre neurônios 4 e 5	110

Figura 112–Correlação cruzada entre neurônio 1 e o 2	111
Figura 113–Correlação cruzada entre neurônio 1 e o 3	111
Figura 114–Correlação cruzada entre neurônio 1 e o 4	112
Figura 115–Correlação cruzada entre neurônio 1 e o 5	112
Figura 116–Correlação cruzada entre neurônios 2 e 3	113
Figura 117–Correlação cruzada entre neurônios 3 e 4	114
Figura 118–Correlação cruzada entre neurônios 4 e 5	114
Figura 119–Relação de fases entre pares de neurônios - topologia unidimensional, $g_e = 1.0$, sem ruído.	115
Figura 120–Relação de fases entre pares de neurônios - topologia unidimensional, $g_c = 1.0$, sem ruído.	116
Figura 121–Relação de fases entre pares de neurônios – topologia em loop, $g_e = 1.0$, sem ruído.	117
Figura 122–Relação de fases entre pares de neurônios – topologia em loop, $g_c = 1.0$, sem ruído.	118
Figura 123–Correlação cruzada entre os neurônios 1 e 2	129
Figura 124–Correlação cruzada entre os neurônios 1 e 3	130
Figura 125–Correlação cruzada entre os neurônios 1 e 4	130
Figura 126–Correlação cruzada entre os neurônios 2 e 3	131
Figura 127–Correlação cruzada entre os neurônios 3 e 4	132
Figura 128–Relação de fases entre neurônios subsequentes	133
Figura 129–Correlação cruzada entre os neurônios 1 e 2	134
Figura 130–Correlação cruzada entre os neurônios 1 e 3	134
Figura 131–Correlação cruzada entre os neurônios 1 e 4	135
Figura 132–Correlação cruzada entre os neurônios 1 e 5	135
Figura 133–Correlação cruzada entre os neurônios 2 e 3	136
Figura 134–Correlação cruzada entre os neurônios 3 e 4	137
Figura 135–Correlação cruzada entre os neurônios 4 e 5	137
Figura 136–Relação de fases entre neurônios subsequentes	138
Figura 137–Correlação cruzada entre os neurônios 1 e 2	139
Figura 138–Correlação cruzada entre os neurônios 1 e 3	139
Figura 139–Correlação cruzada entre os neurônios 1 e 4	140
Figura 140–Correlação cruzada entre os neurônios 1 e 5	140
Figura 141–Correlação cruzada entre os neurônios 2 e 3	141

Figura 142–Correlação cruzada entre os neurônios 3 e 4	141
Figura 143–Correlação cruzada entre os neurônios 4 e 5	142
Figura 144–Relação de fases entre neurônios subsequentes	142
Figura 145–Correlação cruzada entre os neurônios 1 e 2	144
Figura 146–Correlação cruzada entre os neurônios 1 e 3	144
Figura 147–Correlação cruzada entre os neurônios 1 e 4	145
Figura 148–Correlação cruzada entre os neurônios 1 e 5	145
Figura 149–Correlação cruzada entre os neurônios 2 e 3	146
Figura 150–Correlação cruzada entre os neurônios 3 e 4	146
Figura 151–Correlação cruzada entre os neurônios 4 e 5	147
Figura 152–Relação de fases entre neurônios subsequentes	147

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores dos parâmetros utilizados nas simulações numéricas da cadeia de neurônios modelados por Hindmarsh-Rose.	27
Tabela 2 – Limiares de disparo para os parâmetros r do modelo Hindmarsh-Rose	28

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	MOTIVAÇÃO	18
2	NEURÔNIOS E REDES NEURONAIS BIOLÓGICAS	20
2.1	NEURÔNIO BIOLÓGICO	20
2.1.1	A "carga elétrica" do neurônio	21
2.1.2	Potencial de ação	21
2.2	SINAPSES	23
2.2.1	Sinapse elétrica	24
2.2.2	Sinapse química	24
3	MODELO MATEMÁTICO NEURAL	26
3.1	MODELO HINDMARSH E ROSE	26
3.2	UM NEURÔNIO	27
3.2.1	Espaço de variáveis xz	30
3.2.2	Acoplamento de dois neurônios HR	35
3.3	NEURÔNIOS ACOPLADOS	36
3.3.1	Topologia unidimensional	36
3.3.2	Acoplamento elétrico	37
3.3.3	Acoplamento químico	38
4	REDES NEURAIS	40
4.1	ACOPLAMENTO ENTRE MÚLTIPLOS NEURÔNIOS	40
4.1.1	Acoplamento elétrico de múltiplos neurônios	40
4.1.2	Acoplamento químico de múltiplos neurônios	44
4.2	TOPOLOGIA BIDIMENSIONAL	46
4.2.1	Acoplamento elétrico	47
4.2.2	Acoplamento químico	49
5	RUIDO	53
5.1	UM NEURÔNIO	54
5.2	TOPOLOGIA UNIDIMENSIONAL COM MÚLTIPLOS NEURÔNIOS	56
5.2.1	Análise do sinal	56
5.2.2	Acoplamento elétrico $g_e = 1.0$	58
5.2.3	Acoplamento elétrico $g_e = 0.1$	62
5.2.4	Acoplamento químico $g_c = 1.0$	67

5.2.5	Acoplamento químico $g_c = 0.1$	72
5.3	TOPOLOGIA BIDIMENSIONAL COM CINCO NEURÔNIOS	76
5.3.1	Acoplamento elétrico $g_e = 1.0$	76
5.3.2	Acoplamento elétrico $g_e = 0.1$	81
5.3.3	Acoplamento químico $g_c = 1.0$	85
5.3.4	Acoplamento químico $g_c = 0.1$	90
5.4	CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO 5	93
6	SINCRONISMO DA REDE	96
6.1	CORRELAÇÃO CRUZADA	96
6.2	TOPOLOGIA UNIDIMENSIONAL COM MÚLTIPLOS NEURÔNIOS	97
6.2.1	Acoplamento elétrico $g_e = 1.0$, sem ruído - 1D	97
6.2.2	Acoplamento químico $g_c = 1.0$, sem ruído - 1D	102
6.3	TOPOLOGIA BIDIMENSIONAL COM MÚLTIPLOS NEURÔNIOS	107
6.3.1	Acoplamento elétrico $g_e = 1.0$, sem ruído - 2D	107
6.3.2	Acoplamento químico $g_c = 1.0$, sem ruído - 2D	111
6.4	RELAÇÕES DE FASE	115
6.4.1	Acoplamento elétrico $g_e = 1.0$, sem ruído - 1D	115
6.4.2	Acoplamento químico $g_c = 1.0$, sem ruído - 1D	116
6.4.3	Acoplamento elétrico $g_e = 1.0$, sem ruído - 2D	117
6.4.4	Acoplamento químico $g_c = 1.0$, sem ruído - 2D	118
6.4.5	Comparação entre os casos	118
6.5	RESUMO COMPARATIVO DAS RELAÇÕES DE FASE COM RUÍDO INTENSO	121
6.6	SÍNTESE FINAL DO CAPÍTULO 6	122
6.7	CONCLUSÃO INTEGRADA DAS RELAÇÕES DE FASE E TOPOLOGIAS DE REDE - CAPÍTULOS 5 E 6	122
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	125
	REFERÊNCIAS	126

1 INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta a fundamentação teórica e os objetivos que orientam esta pesquisa sobre a dinâmica de redes neurais modeladas pelo sistema de Hindmarsh-Rose. Inicialmente, são expostas as motivações científicas que embasam o estudo da propagação de impulsos neurais em cadeias de neurônios acoplados. Em seguida, são detalhados os problemas de pesquisa abordados, com ênfase na investigação dos efeitos da topologia de conexões, tipo de acoplamento e presença de ruído na sincronização neuronal. Por fim, são estabelecidos os objetivos gerais e específicos do trabalho, delineando claramente as contribuições pretendidas para o campo da neurodinâmica computacional.

1.1 MOTIVAÇÃO

O cérebro humano é composto por uma complexa rede de bilhões de neurônios interconectados, cuja dinâmica coletiva é responsável por fenômenos fundamentais como percepção, memória e tomada de decisões. A compreensão de como sinais elétricos se propagam entre esses neurônios é essencial para elucidar os mecanismos que sustentam essas funções cognitivas. Nesse contexto, modelos matemáticos vêm sendo amplamente utilizados para investigar a atividade neural, permitindo a simulação controlada de variáveis e parâmetros envolvidos nos disparos em cada neurônio e nas chamadas interações sinápticas, que fazem as conexões entre os neurônios.

Entre os diversos modelos existentes, o modelo matemático de Hindmarsh-Rose (HR) destaca-se por sua capacidade de reproduzir padrões de disparos oscilatórios ou caóticos observados em neurônios biológicos. Esse modelo tridimensional é particularmente eficaz na descrição de regimes de excitação supra-limiar, quando a corrente externa aplicada ao neurônio é suficientemente intensa para induzir impulsos neurais ou potenciais de ação recorrentes Hindmarsh e Rose (1984).

A presente dissertação tem como objetivo principal investigar a propagação de impulsos neurais em cadeias simples de neurônios HR acoplados, sob diferentes topologias de conexão e em presença de ruído. O foco está na análise da coerência da atividade neural, da sincronização parcial entre unidades e dos efeitos topológicos sobre a defasagem temporal dos disparos. Para isso, foram utilizadas redes compostas tipicamente por cinco neurônios conectados por acoplamentos elétricos e químicos, tanto em arranjos unidimensionais quanto bidimensionais.

Avaliamos a influência do nível de acoplamento elétrico ou químico (com coeficiente g), que é variado entre o desacoplamento completo ($g = 0$) e o acoplamento total ($g = 1.0$). Esse estudo considera também o efeito da presença de ruído no sinal externo na estabilidade da propagação. Resultados de simulações numéricas revelam ricos padrões de disparos, incluindo regimes de sincro-

nização, liderança de neurônios específicos e persistência de oscilações em *loops* funcionais, mesmo na presença de perturbações estocásticas.

Este trabalho visa contribuir para a descrição e o entendimento dos princípios dinâmicos que regem a comunicação neural em pequenas estruturas, com conexões simples, oferecendo uma base de resultados numéricos relevante para a eventual modelagem de redes neurais mais complexas, artificiais ou biológicas.

2 NEURÔNIOS E REDES NEURONAIS BIOLÓGICAS

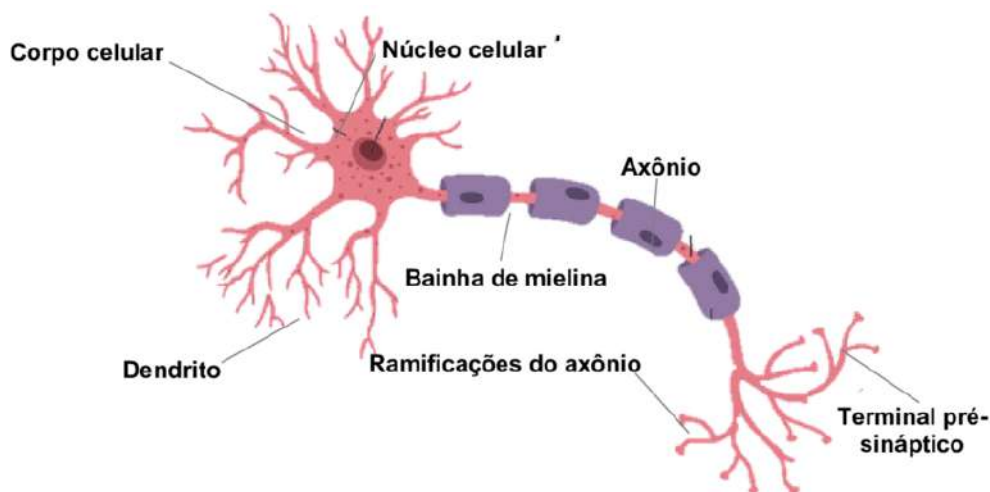
Este capítulo apresenta os fundamentos biológicos que embasam a modelagem matemática de redes neuronais abordada neste trabalho. Inicialmente, são descritas as características estruturais e funcionais do neurônio, a unidade básica do sistema nervoso, com ênfase nos mecanismos eletrofisiológicos que permitem a geração e propagação de sinais neurais. Em seguida, são discutidos os processos de comunicação neuronal através das sinapses, abordando tanto os aspectos elétricos quanto químicos dessa transmissão. A compreensão desses princípios biológicos é essencial para a contextualização dos modelos computacionais que serão explorados nos capítulos subsequentes.

2.1 NEURÔNIO BIOLÓGICO

A célula característica do sistema nervoso é o neurônio. Essa célula, diferentemente de todas as outras células do corpo, é capaz de gerar e transmitir sinais elétricos e químicos, permitindo a comunicação rápida e eficiente com outros neurônios do sistema nervoso.

Um neurônio se divide basicamente em três partes principais: os dendritos, o axônio e o corpo celular como mostrado na Figura 1.

Figura 1 – Estrutura de um neurônio



Fonte: Adaptado de Kandel e colaboradores (2011).

O corpo celular, ou soma, contém o núcleo e os nucléolos, também as aglomerações do retículo endoplasmático rugoso, o complexo de Golgi, mitocôndrias e elementos citoesqueléticos. Normalmente os neurônios tem uma única saída diretamente do corpo celular, o axônio, que tem ramificações, conhecida como árvore dendrítica.

A comunicação entre neurônios se dá pelas sinapses nas extremidades dos dendritos e frequen-

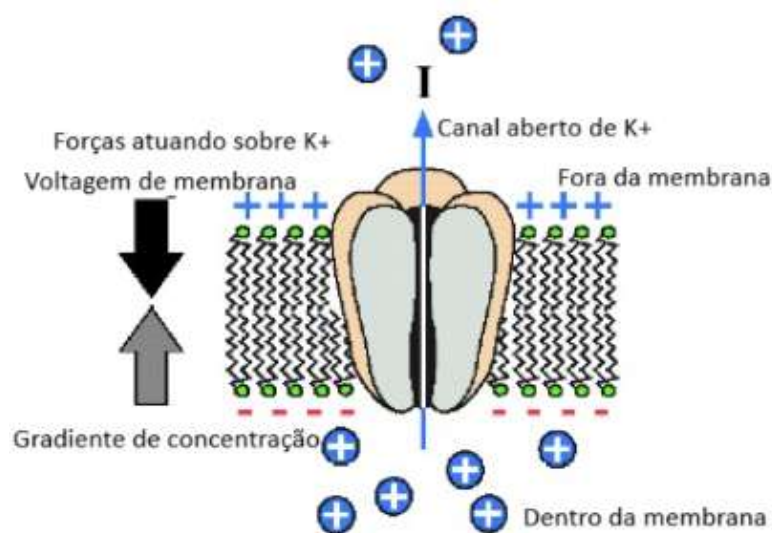
temente se produz através da liberação de neurotransmissores.

2.1.1 A "carga elétrica" do neurônio

Os neurônios são células que no estado de “repouso” não são eletricamente neutras. Existem densidades diferentes de íons no interior e exterior da membrana celular, que criam uma diferença de potencial entre o interior e o exterior do neurônio: o **potencial de repouso**¹.

Os principais íons implicados nesses processos são o Sódio (Na^+), o Potássio (K^+) e o Cálcio (Ca^{2+}) carregados positivamente; e o Cloro (Cl^-) carregado negativamente. No estado de repouso, o interior do neurônio tem carga negativa com respeito ao exterior e se diz que está polarizado. O movimento desses íons através dos canais iônicos na membrana resulta em corrente elétrica. Esse fluxo iônico está esquematizado na Figura 2, particularmente representado para os íons de potássio.

Figura 2 – Movimento dos íons K^+



Fonte: Adaptado da UNAM, 2018.

2.1.2 Potencial de ação

Um fluxo de íons através da membrana leva à despolarização, o que pode levar à formação de um potencial de ação. Este, diferente de outros potenciais, é um evento do tipo *tudo-ou-nada*: ele pode ou não ocorrer, mas quando ocorre, tem sempre a mesma amplitude e não é proporcional ao estímulo. Ou seja, se o valor limiar de aproximadamente -55 mV for ultrapassado, surge o potencial de ação associado. Nesse limiar os canais de Na^+ na membrana se abrem, permitindo a entrada de

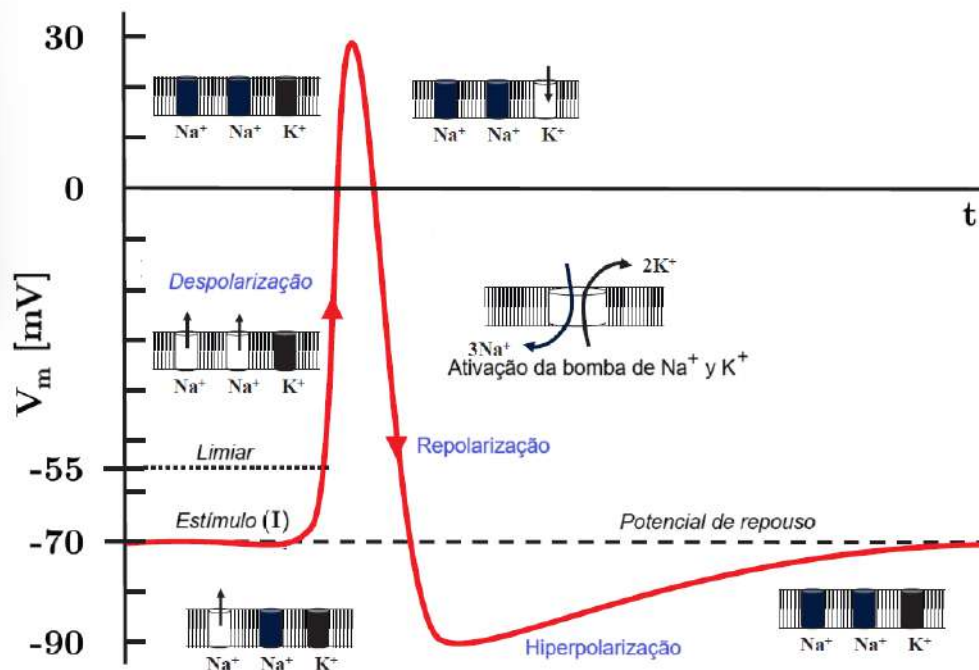
¹ Grifo da autora desta dissertação.

íons sódio, rapidamente aumentado o valor do potencial da membrana. Esse processo é bastante rápido até alcançar o seu valor máximo, de aproximadamente +40 mV. Quando os canais estão inativados e o fluxo do íon sódio cessa um conjunto de canais de potássio se abre, permitindo a passagem de K^+ para fora da célula por causa do gradiente eletroquímico. A junção desses dois eventos diminui o potencial de membrana, e finalmente, quando os canais de potássio se fecham o potencial de membrana se estabiliza no potencial de repouso. Os canais de sódio permanecem fechados e o ciclo do potencial de ação pode ser reiniciado.

O limiar de disparo é o ponto crítico de despolarização da membrana neuronal necessário para que um potencial de ação seja gerado. Esse fenômeno ocorre quando a soma dos estímulos recebidos por um neurônio, tanto excitatórios quanto inibitórios, atinge um valor suficientemente alto (acima de -70 mV de repouso) para abrir de forma significativa os canais de sódio dependentes da voltagem. Em geral, esse valor do limiar situa-se entre -55 e -50 milivolts, dependendo do tipo de neurônio e das condições fisiológicas da célula. Uma vez atingido esse limiar, inicia-se um ciclo autorreforçado de entrada de íons Na^+ , levando a uma rápida despolarização da membrana, que constitui o potencial de ação, ilustrado na Figura 3.

Esse processo de geração e propagação de impulsos neurais é fundamental para a transmissão de sinais no sistema nervoso, sendo um mecanismo de operação binária no nível celular: ou o estímulo é suficiente e o neurônio dispara, ou não é, e a membrana retorna ao seu potencial de repouso sem gerar impulso. Além do conceito de limiar de disparo, outros aspectos essenciais para a codificação de informações neurais estão intimamente ligados à integração sináptica e à frequência de disparo, Kandel *et al.* (2014).

Figura 3 – Limiar de disparo de um neurônio



Fonte: Adaptado de Flores (2019).

2.2 SINAPSES

A transmissão sináptica é o processo pelo qual informação gerada ou processada por um neurônio é transmitida a outro neurônio ou célula receptora. Trata-se de uma conexão funcional entre um neurônio pré-sináptico e uma célula pós-sináptica (que pode ser outro neurônio, uma célula muscular ou glandular)

O **neurônio pré-sináptico** é aquele que envia o sinal. Ele contém vesículas sinápticas repletas de neurotransmissores que são liberados na fenda sináptica em resposta à um potencial de ação. Esses neurotransmissores difundem-se na fenda e se ligam a receptores na membrana do neurônio posterior.

O **neurônio pós-sináptico**, por sua vez, é aquele que recebe o sinal químico. Ele possui receptores específicos que reconhecem os neurotransmissores liberados e convertem essa informação química em um novo sinal elétrico, que pode, ou não, gerar um novo potencial de ação, dependendo da intensidade e do tipo de sinapse (excitadora ou inibitória).

Sinapses podem ser classificadas segundo a seu tipo, como sendo:

- **Elétrico** → É mais simples; formada por junções comunicantes; é ultrarrápida e na maioria dos casos é bidirecional.

- **Químico** (transmissão neuro-Química) → É mais elaborada; formada por fenda sináptica e neurotransmissores; é majoritária no sistema nervoso da maioria dos vertebrados; é unidirecional (Oliveira, 2020).

As sinapses se classificam segundo a sua função:

- **Excitatória** → Quando o resultado é um potencial despolarizante, ou seja, neste tipo de sinapse promove-se a entrada de cargas positivas no neurônio pós-sináptico, tornando mais fácil que este neurônio saia do repouso e que seja gerado o potencial de ação, como por exemplo o sódio. A consequência da sinapse excitatória é uma despolarização pós-sináptica.
- **Inibitória** → Quando o resultado é um potencial pós-sináptico hiperpolarizante, ou seja, neste tipo de sinapse promove-se a entrada de cargas negativas, inibindo o neurônio pós-sináptico a sair do repouso, como por exemplo o cloro. A consequência da sinapse inibitória é uma hiperpolarização pós-sináptica, ou seja, a mensagem não é passada adiante.

2.2.1 Sinapse elétrica

Nas sinapses elétricas as membranas dos neurônios pre e pós-sinápticos estão conectadas por uma espécie de junção, ou união comunicante. No centro desse canal flui uma corrente iônica de um neurônio para o outro de forma direta conectando as membranas citoplasmáticas. Esses canais possuem uma condutância muito alta (ou seja, tem uma baixa resistência) permitindo com facilidade a despolarização que gera um potencial de ação no neurônio pos-sináptico. Esse tipo de sinapse é considerado bidirecional.

A transmissão rápida da corrente ativa via sinapses elétricas tende a sincronizar os neurônios. A eficácia dessas conexões pode ser modulada por fatores como a concentração intracelular de Ca^{2+} e H^+ , que influenciam a abertura ou fechamento das junções gap. Esses mecanismos permitem uma regulação dinâmica da conectividade elétrica entre neurônios, o que pode contribuir tanto para a sincronização quanto para a dessincronização funcional em redes neurais Bennett e Zukin (2004).

2.2.2 Sinapse química

A sinapse química é um dos principais mecanismos de comunicação entre neurônios no sistema nervoso, por meio da qual sinais elétricos são convertidos em sinais químicos, permitindo a transmissão da informação entre células.

Esse processo inicia-se com a chegada de um potencial de ação ao terminal axonal do neurônio pré-sináptico, o que desencadeia a abertura de canais de cálcio dependentes de voltagem. A entrada de íons cálcio (Ca^{2+}) promove a fusão de vesículas sinápticas com a membrana do neurônio, liberando neurotransmissores na fenda sináptica — o espaço extracelular que separa as células envolvidas na sinapse.

Os neurotransmissores então difundem-se através da fenda sináptica e se ligam a receptores específicos localizados na membrana da célula pós-sináptica. A ativação desses receptores pode gerar uma resposta excitatória ou inibitória, dependendo do tipo de neurotransmissor liberado e do receptor ativado.

As sinapses químicas são, em geral, unidirecionais e apresentam grande capacidade de modulação, o que as torna fundamentais para processos como aprendizado, memória, controle motor e regulação de estados emocionais. Neurotransmissores como glutamato, GABA, dopamina, acetilcolina e serotonina desempenham papéis centrais nesses processos.

Embora sejam mais lentas que as sinapses elétricas, as sinapses químicas oferecem maior diversidade funcional e flexibilidade, sendo predominantes no cérebro dos mamíferos, Purves *et al.* (2001).

3 MODELO MATEMÁTICO NEURAL

Este capítulo apresenta o modelo de Hindmarsh-Rose, o framework matemático utilizado para simular a dinâmica neuronal neste trabalho. Inicialmente, são descritos os fundamentos do modelo tridimensional, suas equações diferenciais e os parâmetros que governam o comportamento dos neurônios isolados. Em seguida, analisa-se a resposta de um único neurônio a diferentes correntes externas, explorando regimes periódicos e caóticos através de séries temporais e espaços de fase. Posteriormente, são introduzidos os mecanismos de acoplamento elétrico e químico entre neurônios, com ênfase na influência da intensidade do acoplamento na sincronização da atividade neural. Por fim, são investigadas configurações unidimensionais de dois neurônios acoplados, estabelecendo as bases para o estudo de redes mais complexas nos capítulos seguintes.

3.1 MODELO HINDMARSH E ROSE

Na busca de descrições quantitativas do comportamento dinâmico dos impulsos elétricos de neurônios, Hindmarsh e Rose (1982) propuseram um modelo inicial que foi concebido com base em dois tipos de medidas eletrofisiológicas, (i) medidas de fixação de voltagem e (ii) transientes após a aplicação de degraus de corrente em células do gânglio visceral do molusco *Lymnaea stagnalis*. Estas medidas permitiram a formulação de um modelo bidimensional que reproduz potenciais de ação similares aos de neurônios reais, Reyes (2005).

No processo de construção do modelo, os autores consideraram que a variação do potencial de membrana x do neurônio dependia de duas variáveis de maneira não linear: uma variável de recuperação y , que representa a corrente de transporte de íons rápidos, e uma variável de adaptação lenta z , associada à corrente de íons lentos. A simplificação introduzida pelos autores foi assumir que $x(t)$ possui um tempo de decaimento constante após o pulso de voltagem, ou seja, decai exponencialmente. Esta abordagem difere das hipóteses de Hodgkin e Huxley, que utilizaram equações baseadas em condutâncias dependentes do tempo e da voltagem para canais específicos de íons como sódio e potássio, Hindmarsh e Rose (1984).

Posteriormente Hindmarsh e Rose (1984) estenderam o modelo para incluir uma terceira variável dinâmica z , permitindo a reprodução de disparos em *bursting* e comportamentos mais complexos. O modelo mais completo tridimensional, é descrito pelas equações:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - ax^3 + bx^2 + I - z, \\ \dot{y} = c - dx^2 - y, \\ \dot{z} = r(s(x - x_0) - z), \end{cases} \quad (3.1)$$

Onde:

x : Potencial de membrana;

y : Variável que controla o pico de disparo e está associada aos íons rápidos (Na^+ e K^+);

z : Variável associada aos íons lentos (Ca^{2+});

I : Corrente externa aplicada;

s : Fator de escala da influência do potencial na dinâmica lenta;

r : Fator de escala de adaptação lenta;

x_0 : Potencial de repouso.

Este modelo tridimensional tem sido amplamente adotado para descrever as ricas atividades elétricas de neurônios biológicos, incluindo padrões periódicos e caóticos, Hindmarsh e Rose (1984), Izhikevich (2003), Shilnikov, Calabrese e Cymbalyuk (2008).

3.2 UM NEURÔNIO

Inicialmente se estabeleceram as condições iniciais de operação para um único neurônio descrito pelo modelo HR (Equação 3.1, os parâmetros utilizados na simulação se apresentam na Tabela 1. Essa condição se aplica a todos os resultados com as topologias aqui estudadas. Quando algum dos parâmetros da Tabela 1 for mudado será devidamente sinalizado.

Tabela 1 – Valores dos parâmetros utilizados nas simulações numéricas da cadeia de neurônios modelados por Hindmarsh-Rose.

Parâmetros	Valores
a	1.0
b	3.0
c	1.0
d	5.0
s	4.0
x_0	-1.6

Fonte: Adaptado de Hindmarsh & Rose (1984).

Particularmente foi estudada a resposta de um neurônio HR quando o valor de r é variado . Os

resultados que obtivemos estão de acordo com Jia e Chen (2013) que investigaram o comportamento de redes neuronais formadas por neurônios modelados pelo sistema de HR, com foco na sincronização e na influência da topologia da rede. Os autores mantiveram o parâmetro de adaptação lenta em $r = 0.005$, valor que favorece padrões oscilatórios do tipo *bursting*. Foi observado que a estrutura de conexão e a intensidade do acoplamento afetam fortemente a capacidade de sincronização da rede, sendo que redes aleatórias tendem a facilitar maior estabilidade nos padrões coletivos de disparo.

O parâmetro r modifica ligeiramente o valor de I_{sth} , sendo I_{sth} a corrente sublimiar, de modo que, para diferentes valores de r , o limiar de disparo I_{sth} pode mudar, alterando a condição para disparo.

$$I(s) \geq I_{sth} \quad (3.2)$$

A equação $I(s) \geq I_{sth}$ expressa a condição necessária para que um sistema excitatório, como um neurônio, dispare quando a corrente de entrada $I(s)$ atinge ou excede um valor limiar I_{sth} .

Tabela 2 – Limiares de disparo para os parâmetros r do modelo Hindmarsh-Rose

Valores de r	$I_{disparo}$
0,001	$\geq 1,260$
0,002	$\geq 1,268$
0,003	$\geq 1,277$
0,004	$\geq 1,287$
0,005	$\geq 1,300$
0,006	$\geq 1,320$
0,007	$\geq 1,331$
0,008	$\geq 1,332$

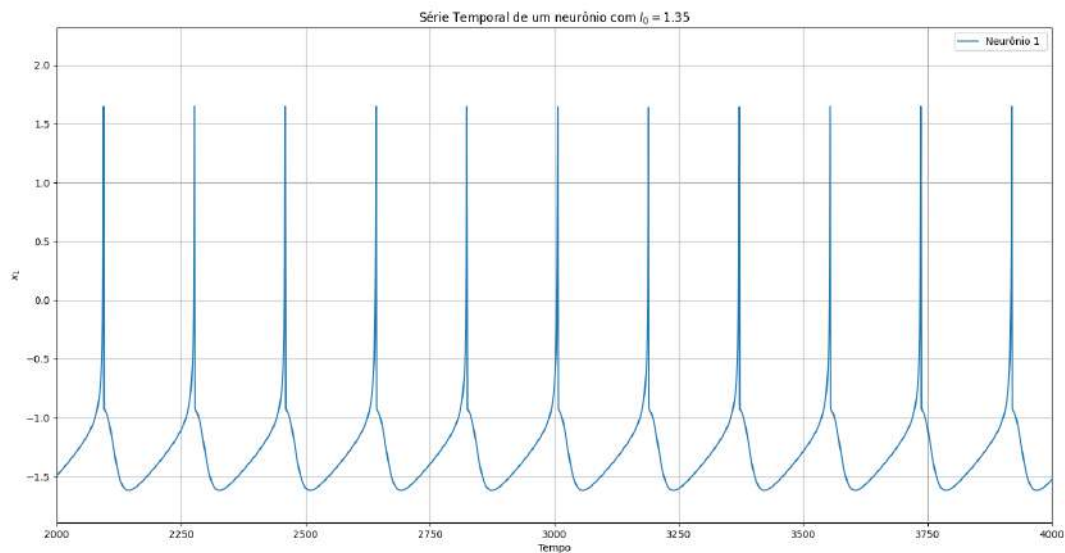
Fonte: elaborado pela própria autora.

De acordo com Hindmarsh e Rose (1984), a adaptação lenta desempenha um papel crucial no início e manutenção das oscilações neuronais. Quando r é pequeno, o sistema apresenta maior sensibilidade a estímulos, com limiares de disparo mais baixos (1 disparo). Isso reflete uma menor estabilização das oscilações pelo mecanismo de adaptação, resultando em padrões caóticos ou quase-periódicos. Por outro lado, conforme r aumenta, o sistema requer valores maiores de corrente de disparo. De acordo com Izhikevich (Izhikevich, 2000, P. 210-217) mecanismos de adaptação lenta, como o controlado por r no modelo de Hindmarsh-Rose, exercem forte influência sobre a regularidade e a estabilidade dos padrões de disparo. Valores mais altos de r tendem a produzir rajadas mais curtas e previsíveis, enquanto valores mais baixos aumentam a sensibilidade a estímulos externos e podem induzir dinâmicas caóticas ou irregulares.

Para redes acopladas, Pikovsky, Rosenblum e Kurths (2003) destacam que r alto favorece a sincronização entre os neurônios, enquanto r baixo pode induzir dinâmicas não sincronizadas ou caóticas. De forma geral, o parâmetro r pode controlar a dinâmica de excitação ou adaptação do sistema, influenciando a sensibilidade ao limiar de disparo.

Para as simulações feitas, os parâmetros usados são da Tabela 1, com o limiar de disparo é $I_0 = 1.300$, quando $r = 0.005$ como discutido abaixo. Na Figura 4 se mostra a serie temporal com $I = 1.35$, observa-se um padrão oscilatório periódico com disparos regulares, característicos de um neurônio em regime de disparo contínuo. Esse padrão de disparo, com rápidas elevações e quedas suaves, é típico da dinâmica de potenciais de ação. Esse comportamento reflete uma atividade rítmica autossustentada, típica de neurônios com excitação supralimiar em ausência de ruído e acoplamento.

Figura 4 – Serie temporal de um neurônio com $I = 1.35$



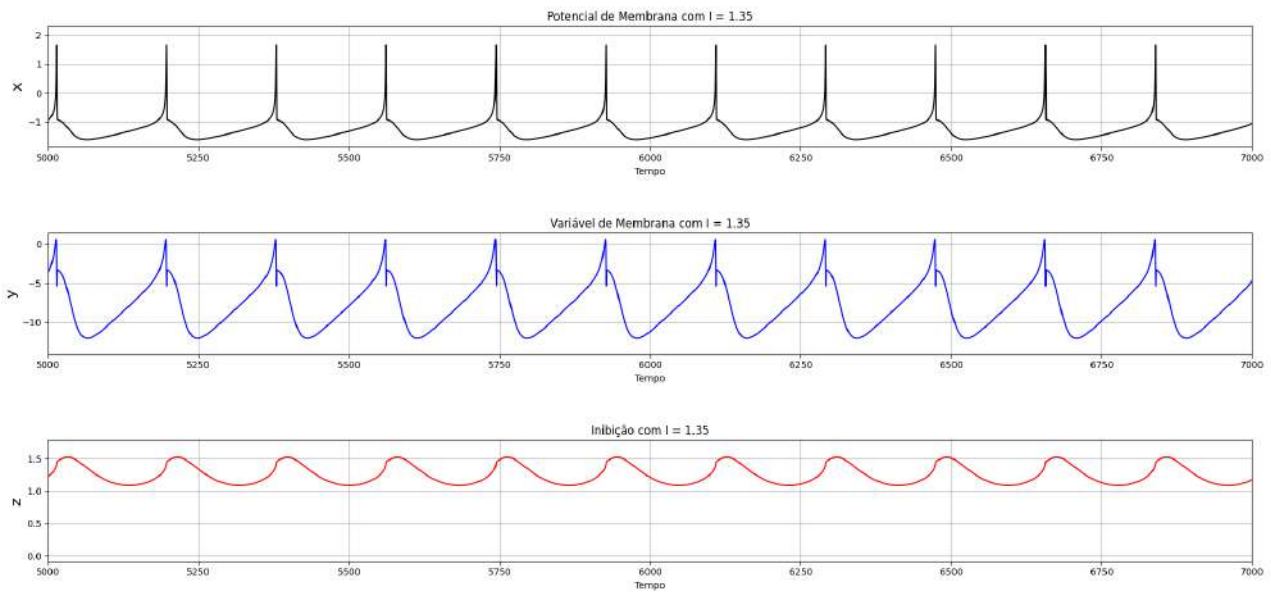
Fonte: elaborado pela própria autora.

Neste trabalho a atenção maior será para o comportamento da variável x , que descreve com o potencial de ação. Na Figura 5 apresentamos também as variáveis y e z , soluções da Equação 3.1 e que definem o comportamento do neurônio, segundo o modelo não-linear de HR.

A Figura 5 apresenta a evolução temporal das três variáveis dinâmicas de um neurônio simulado para um valor de corrente de entrada $I_0 = 1.35$. O primeiro gráfico exibe a variável $x_1(t)$, que representa o potencial de membrana; o segundo mostra a variável $y_1(t)$, associada à recuperação do neurônio; e o terceiro exibe $z_1(t)$, uma variável lenta que regula a adaptação do disparo.

O comportamento da variável x foi apresentado na análise da Figura 4. A variável y oscila de maneira acoplada a x , funcionando como um mecanismo de retroalimentação que regula a duração e o espaçamento entre os disparos. A variável z apresenta uma dinâmica ainda mais lenta e com

Figura 5 – Comportamento das variáveis $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ de um neurônio, solução do modelo HR (Eq. 3.1), com os parâmetros da Tabela 1.



Fonte: elaborado pela própria autora.

menores flutuações, essa variável atua como um modulador da excitabilidade neuronal em uma escala de tempo mais longa, sendo fundamental para a transição entre diferentes modos de disparo, como *bursting* e oscilações regulares.

O conjunto dessas três variáveis permite ao modelo HR reproduzir uma ampla variedade de padrões de atividade elétrica observados em neurônios biológicos reais, evidenciando sua robustez na modelagem de fenômenos neuronais complexos.

3.2.1 Espaço de variáveis xz

Variando-se apenas o valor da corrente I (com valor de r fixo) é possível explorar diversos regimes de disparos do neurônio: passando de disparos regulares para regimes caóticos.

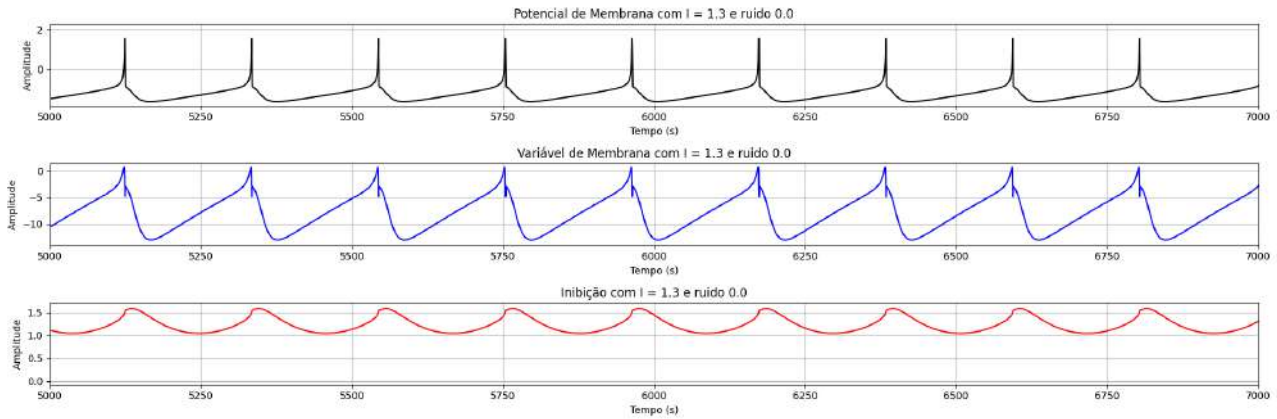
Para analisar o comportamento dinâmico de um neurônio HR além das séries temporais é possível traçar os gráficos de x em função de z , o que permite visualizar o papel relativo dessas variáveis.

É analisado nas Figuras 6 a 13 como o modelo se comporta para diversos valores de I , com os gráficos xz visualmente ilustrando quando o regime é periódico (órbitas fechadas) ou caótico (órbitas abertas).

Limiar de disparo

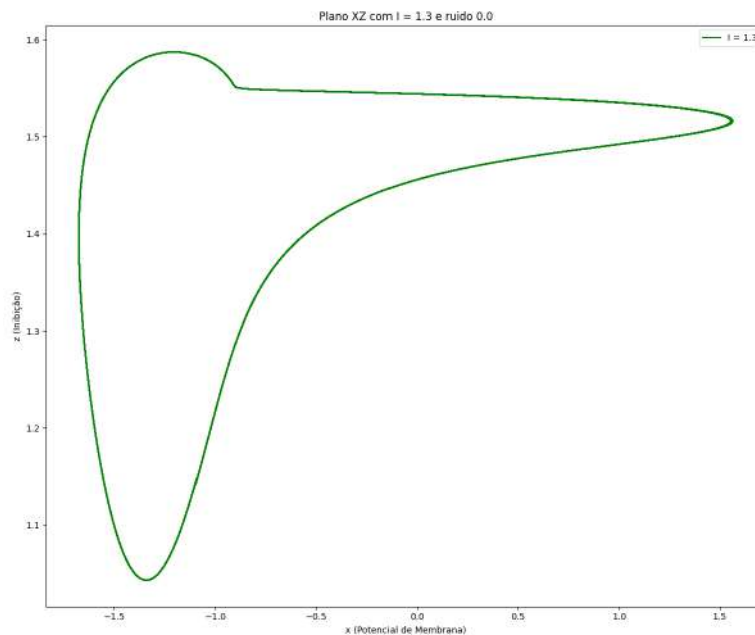
No limiar de disparo, $I=1.30$, o comportamento de $x(t)$ é bastante regular: Figura 6 o gráfico de xz é uma curva muito bem definida, apresentada na Figura 7.

Figura 6 – Serie temporal para corrente perto do limiar de disparo



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 7 – Espaço de variáveis xz para corrente perto do limiar de disparo



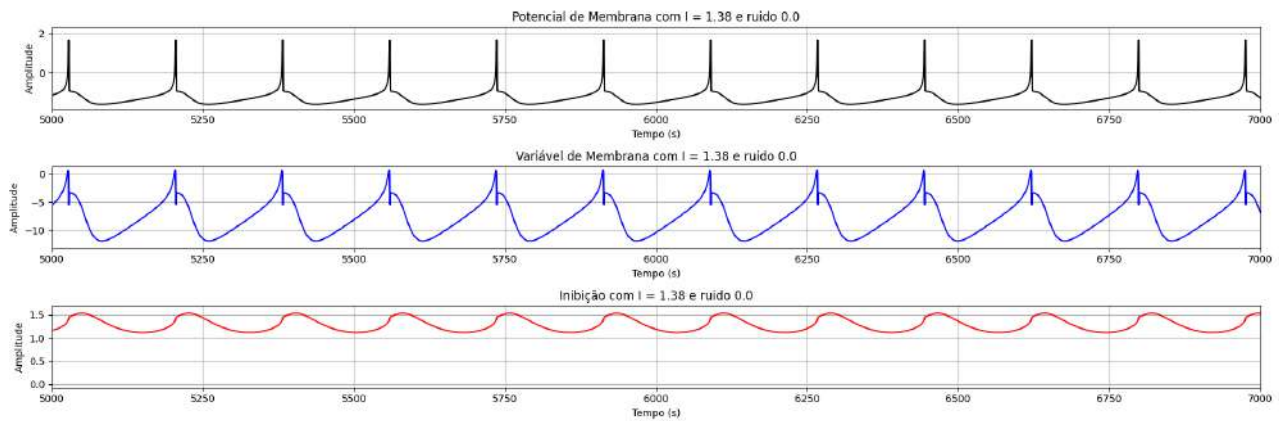
Fonte: elaborado pela própria autora.

Regime periódico

Aumentando-se I , com excitação externa $I = 1.38$, o comportamento gerado pelo neurônio torna se em fases de pulsos, ou seja, um comportamento oscilatório na qual os planos de fase convergem

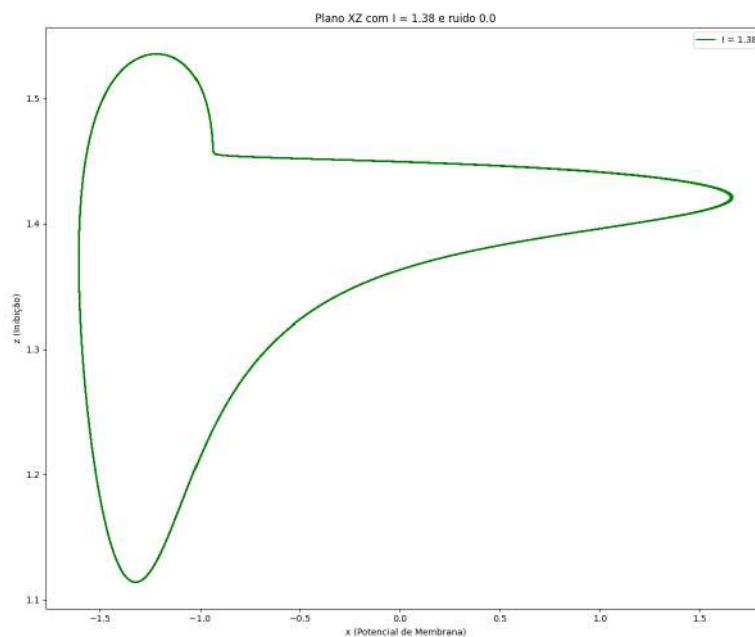
para órbitas periódicas, como podem ser observado nas Figuras 8 e 9.

Figura 8 – Serie temporal para corrente levemente acima do limiar de disparo



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 9 – Espaço de variáveis xz para corrente acima do limiar de disparo

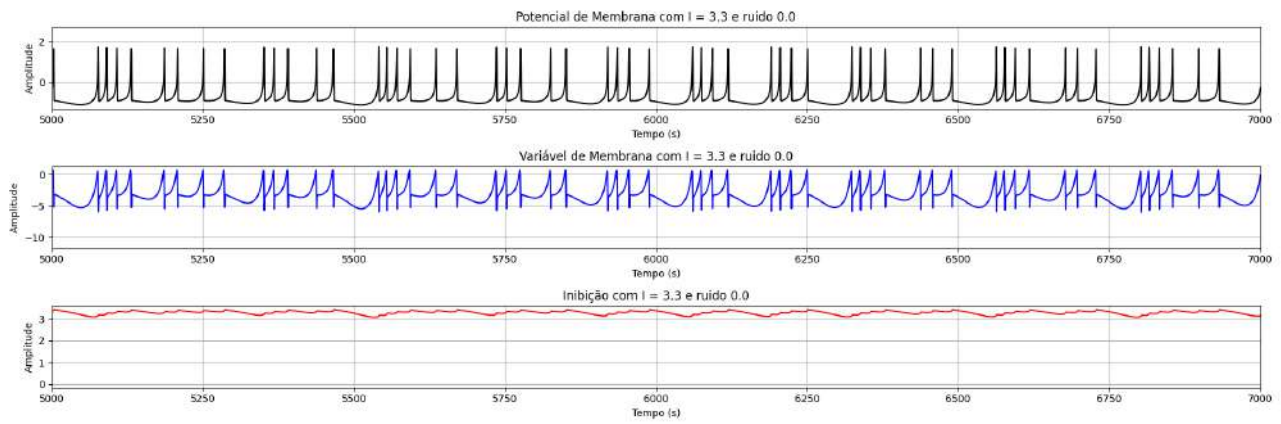


Fonte: elaborado pela própria autora.

Regime caótico

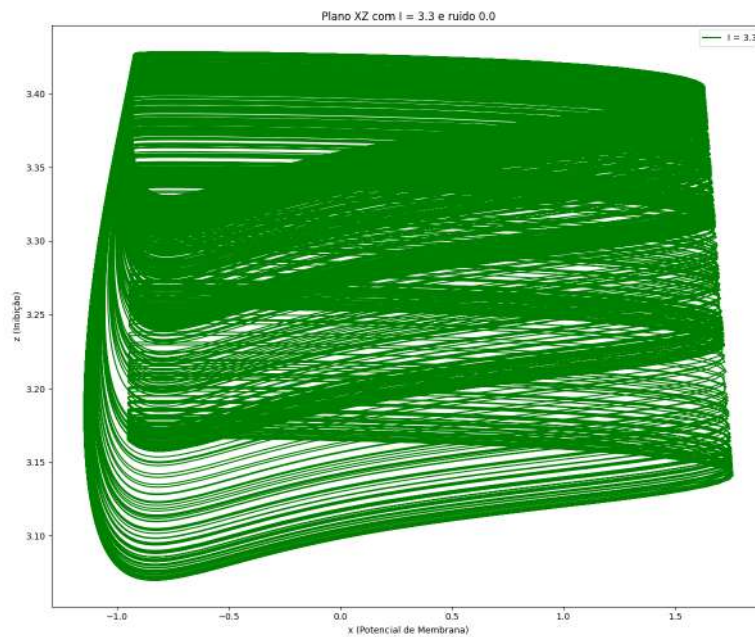
Passando para valores bem mais altos da corrente externa injetada $I = 3.3$, como ilustrado nas series temporais das figuras 10, o espaço de fase xz da Figura 11 exibe uma trajetória aberta. O sistema continua oscilando, porém com trens de pulsos irregulares, que variam no tempo ainda que mantenham a amplitude dos picos.

Figura 10 – Serie temporal para corrente caótica



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 11 – Espaço de variáveis xz para corrente caótica

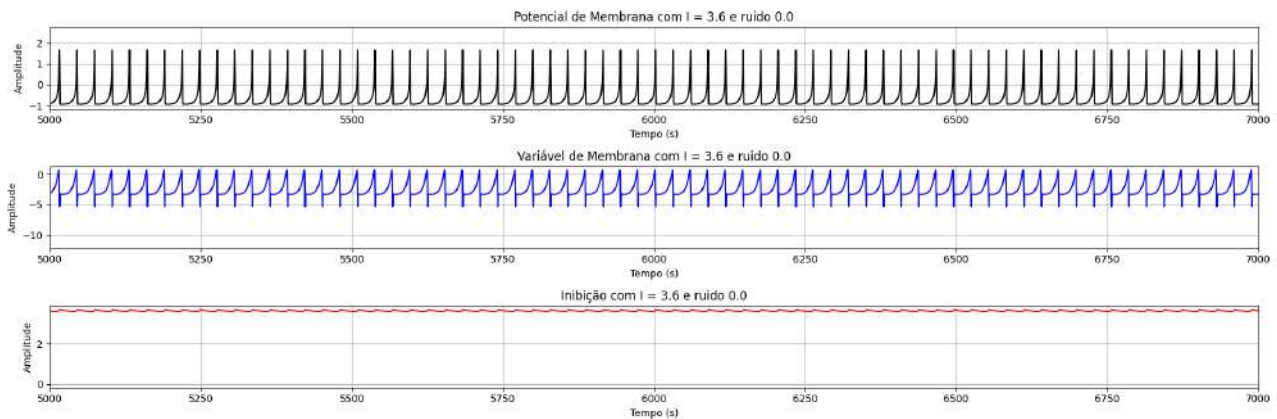


Fonte: elaborado pela própria autora.

Retorno ao regime periódico

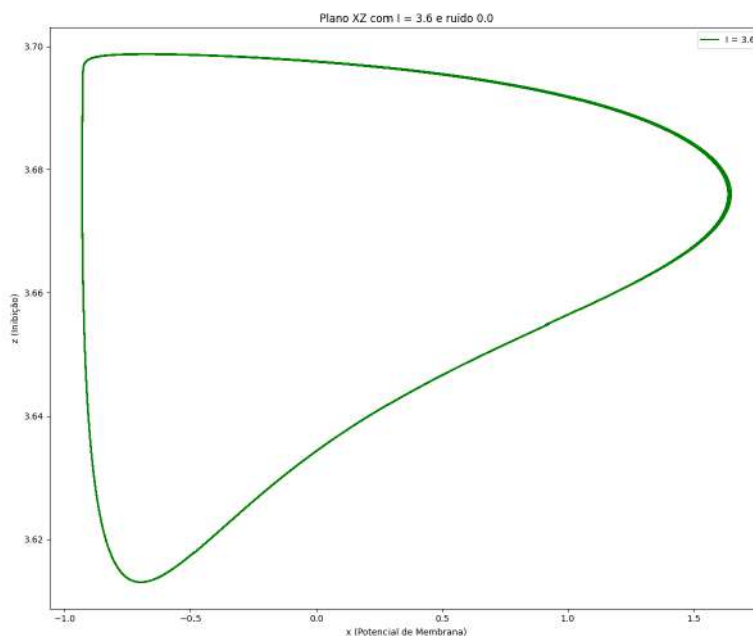
Após o regime caótico (em torno ao valor de corrente 3,3) para uma corrente externa injetada de 3.6, o sistema volta a ser periódico, como ilustrado na Figura 12, o espaço de fase xz da Figura 13 exibe uma trajetória fechada. Note porém que a frequência passa a ser bem maior que aquelas de corrente próximas do limiar (Figuras 6 a 9)

Figura 12 – Serie temporal para corrente acima da caótica



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 13 – Espaço de variáveis xz para corrente acima da caótica



Fonte: elaborado pela própria autora.

3.2.2 Acoplamento de dois neurônios HR

O acoplamento entre neurônios pode ocorrer de diversas maneiras, incluindo acoplamento elétrico e acoplamento químico. O modelo HR pode ser adaptado para incorporar esses mecanismos de interação, acrescentando-se um termo na equação da variável x no modelo de três variáveis HR (Equação 3.1), representado como $k(x_i - x_{i-1})$, onde x_i e x_{i-1} correspondem aos neurônios acoplados eletricamente.

Acoplamento elétrico (k_e)

No acoplamento elétrico o termo $k(x_i - x_{i-1})$ representa a diferença dos potenciais de membrana entre os neurônios. Quando os dois neurônios tem potenciais iguais, o valor do acoplamento é zero, Mainieri (2006). Com o acréscimo do novo termo, as equações do modelo tornam-se:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = y_i - ax_i^3 + bx_i^2 - z + I(t) - k_e(x_i, x_{i-1}), \\ \dot{y}_i = c - dx_i^2 - y_i, \\ \dot{z}_i = -rz_i + rS(x_i - x_0). \end{cases} \quad (3.3)$$

O acoplamento elétrico entre neurônios é determinado pela diferença de potencial elétrico entre eles. Essa interação é representada pelo termo k_e , dado por:

$$k_e = g_e(x_{i+1} - x_i), \quad (3.4)$$

onde:

- g_e é o fator de acoplamento elétrico (intensidade do acoplamento),
- x_i é o potencial de membrana do neurônio receptor,
- x_{i-1} é o potencial de membrana do neurônio emissor.

Frequentemente utiliza-se para valores de acoplamento $0 < g_e < 1$, onde $g_e = 0$ significa que os neurônios não estão acoplados e $g_e = 1$ totalmente acoplados, Wang, Perc e Duan (2008). Para o valores de $g_e > 0,55$ o acoplamento de informação já é considerada forte, Olmi, Politi e Torcini (2010). Para valores entre $0,20 < g_e < 0,5$ o acoplamento é parcial (fraca) e para $g_e < 0,20$ a sinapse é considerada muito fraca, Mainieri (2006). Neste tipo de acoplamento, o estado sináptico é sempre excitatório, pois esta relaciona com o fluxo direto de corrente fluindo de um neurônio para outro.

Acoplamento químico (k_c)

O acoplamento químico k_c refere-se à interação mediada por mensageiros químicos. Esse processo, conhecido como sinapse química, realiza a comunicação entre neurônios por meio de substâncias químicas, desempenhando um papel fundamental na transmissão de sinais dentro do sistema nervoso, Somers e Kopell (1993).

Seguindo Destexhe, Mainen e Sejnowski (1994) usamos uma expressão matemática para implementar o comportamento descrito acima, o acoplamento químico entre dois neurônios i e o anterior $i-1$, é feito pela diferença do valor do potencial de x_i pre-sináptico com um valor de corte V_c (potencial inverso) e a função de ativação $\Gamma(x_{i-1})$, relacionado ao potencial pós-sináptico, dado na forma:

O termo correspondente é dado por:

$$k_c(x_i - x_{i-1}) = g_c(x_i - V_c)\Gamma(x_{i-1}), \quad (3.5)$$

onde:

$$\Gamma(x_{i-1}) = \frac{1}{1 + \exp(-\lambda(x_{i-1} - \theta))}. \quad (3.6)$$

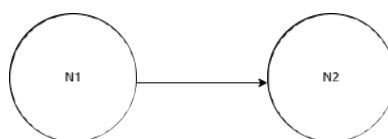
A função sigmoide na Equação 3.6 é responsável por ativar a corrente pós-sináptica quando um neurônio pré-sináptico envia um potencial de ação. Dependendo dos seus parâmetros, o coeficiente λ define a rapidez do decaimento e θ é o potencial de corte, determina-se a probabilidade de transmissão de neurotransmissores.

3.3 NEURÔNIOS ACOPLADOS

3.3.1 Topologia unidimensional

O acoplamento entre neurônios biológicos pode ocorrer via múltiplas sinapses, através de acoplamento elétrico e ou acoplamento químico como apresentado no Capítulo 2, Seção 2. No modelo HR esses mecanismos de interação são introduzidos via o termo da corrente, ver Equação 3.3. Nesta seção será apresentada a relação de acoplamento para dois neurônios tanto elétrica como química unidirecional como se ilustra na Figura 14.

Figura 14 – Acoplamento unidirecional de dois neurônios

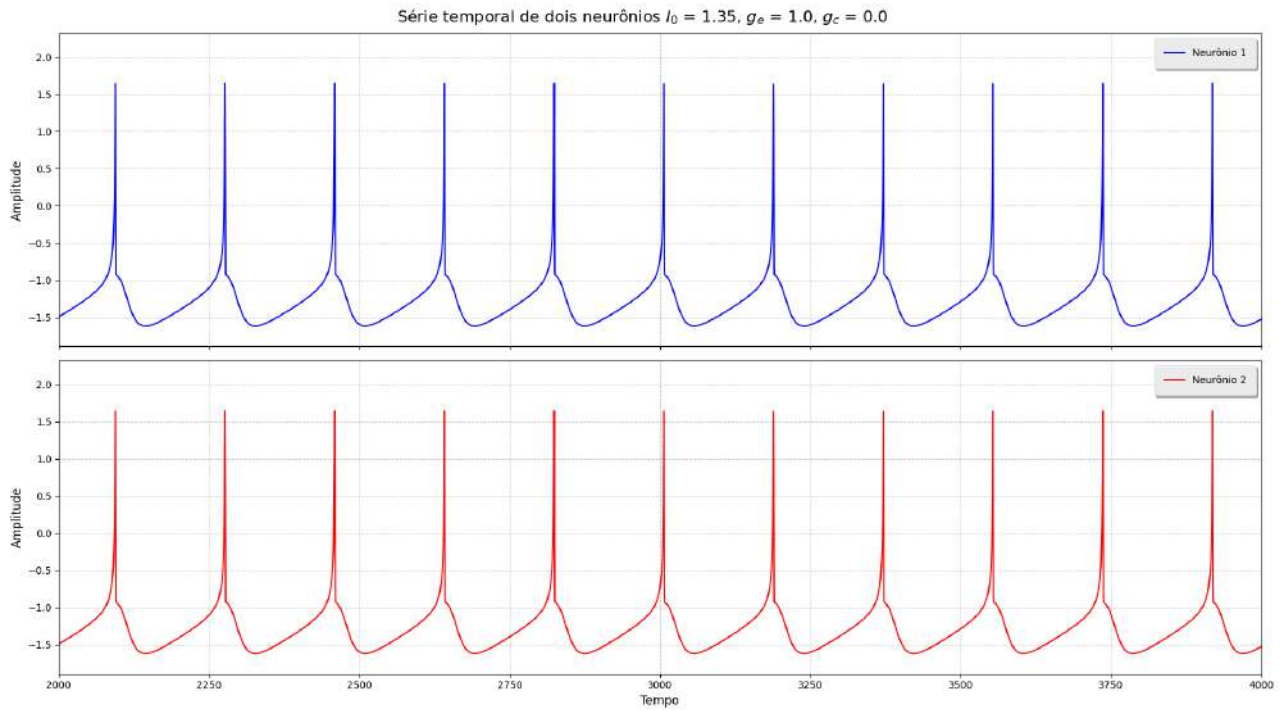


Fonte: elaborado pela própria autora.

3.3.2 Acoplamento elétrico

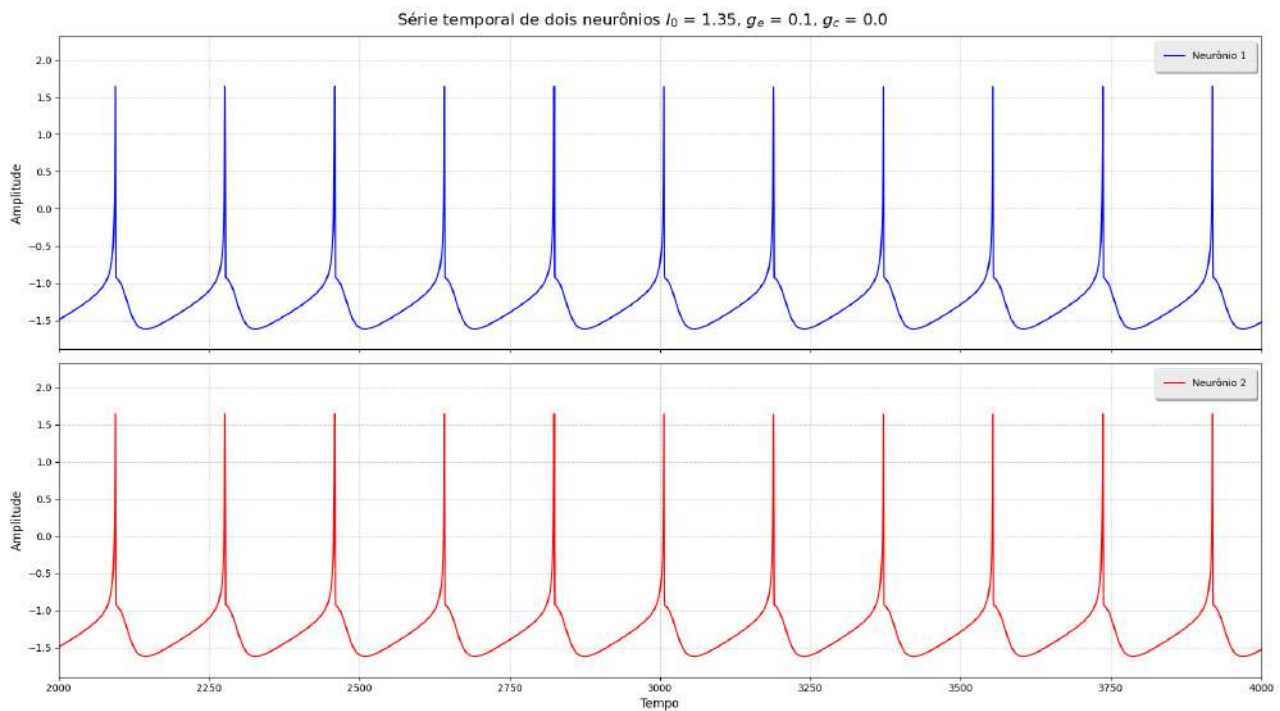
Foram testados dois valores distintos de g_e cujos resultados estão nas Figuras 15 e 16.

Figura 15 – Séries temporais dos dois neurônios com acoplamento elétrico $g_e = 1.0$, $I_0 = 1.35$ e $g_c = 0.0$ - 1D



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 16 – Séries temporais dos dois neurônios com acoplamento elétrico $g_e = 0.1$, $I_0 = 1.35$ e $g_c = 0.0$ - 1D



Fonte: elaborado pela própria autora.

Na Figura 15, observa-se que, com um valor elevado de condutância excitatória $g_e = 1.0$, os dois neurônios apresentam atividade sincronizada. Os picos de ativação (disparos) ocorrem em tempos muito próximos para ambos os neurônios, sugerindo um acoplamento eficiente que favorece o comportamento coerente entre eles. A forma dos pulsos também é muito parecida, o que indica que o forte acoplamento excitatório impõe um regime de oscilação comum.

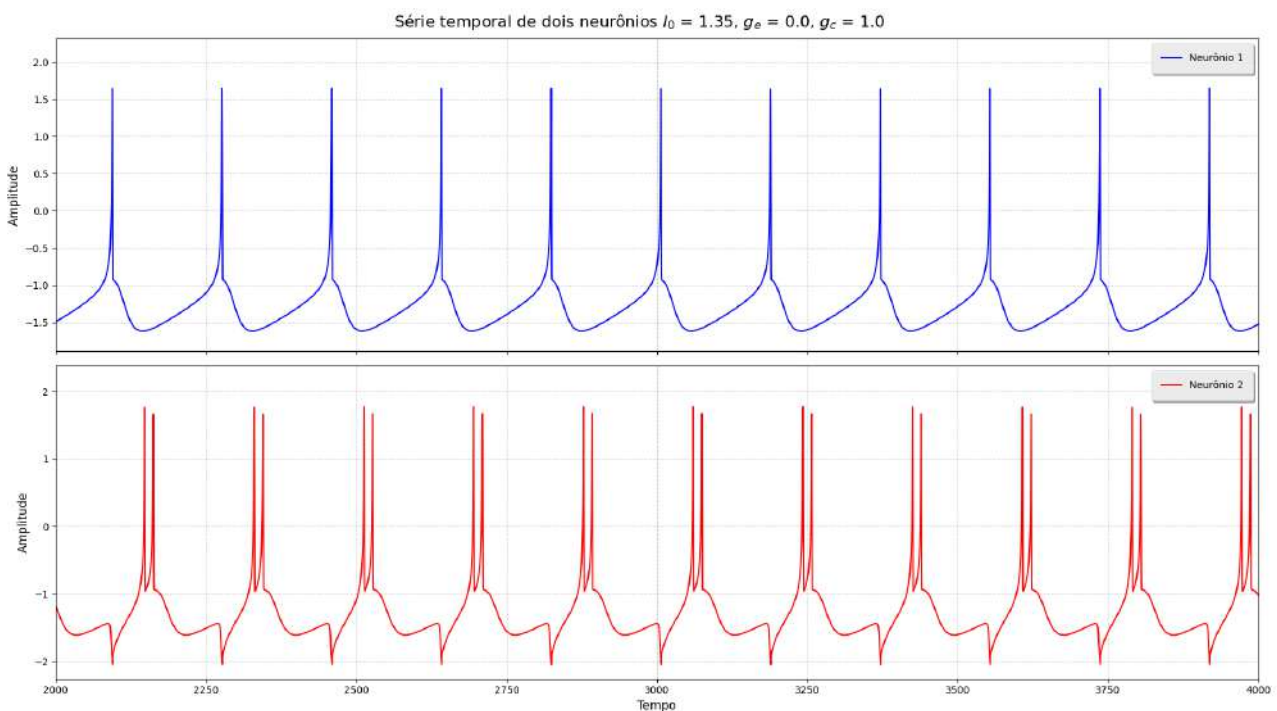
Por outro lado com $g_e = 0.1$, na Figura 16, embora os neurônios ainda mantenham uma frequência de disparo semelhante, há um leve descompasso entre os picos de ativação. Isso sugere que, com um acoplamento mais fraco, a influência mútua entre os neurônios diminui, permitindo que pequenas diferenças em suas dinâmicas internas se manifestem. Ainda assim, a frequência permanece próxima, o que pode indicar um comportamento acoplado, mas não perfeitamente sincronizado.

3.3.3 Acoplamento químico

Para ilustrar o efeito da variação da intensidade do acoplamento químico (g_c) sobre a atividade neuronal, apresentamos a seguir séries temporais obtidas para dois valores distintos de g_c , mantendo-se constantes os demais parâmetros ($I_0 = 1.35$ e $g_e = 0.0$).

Na Figura 17, observa-se a dinâmica de dois neurônios acoplados quimicamente com $g_c = 1.0$. A forte intensidade de acoplamento favorece a sincronização dos padrões de disparo, resultando em uma atividade oscilatória altamente coordenada.

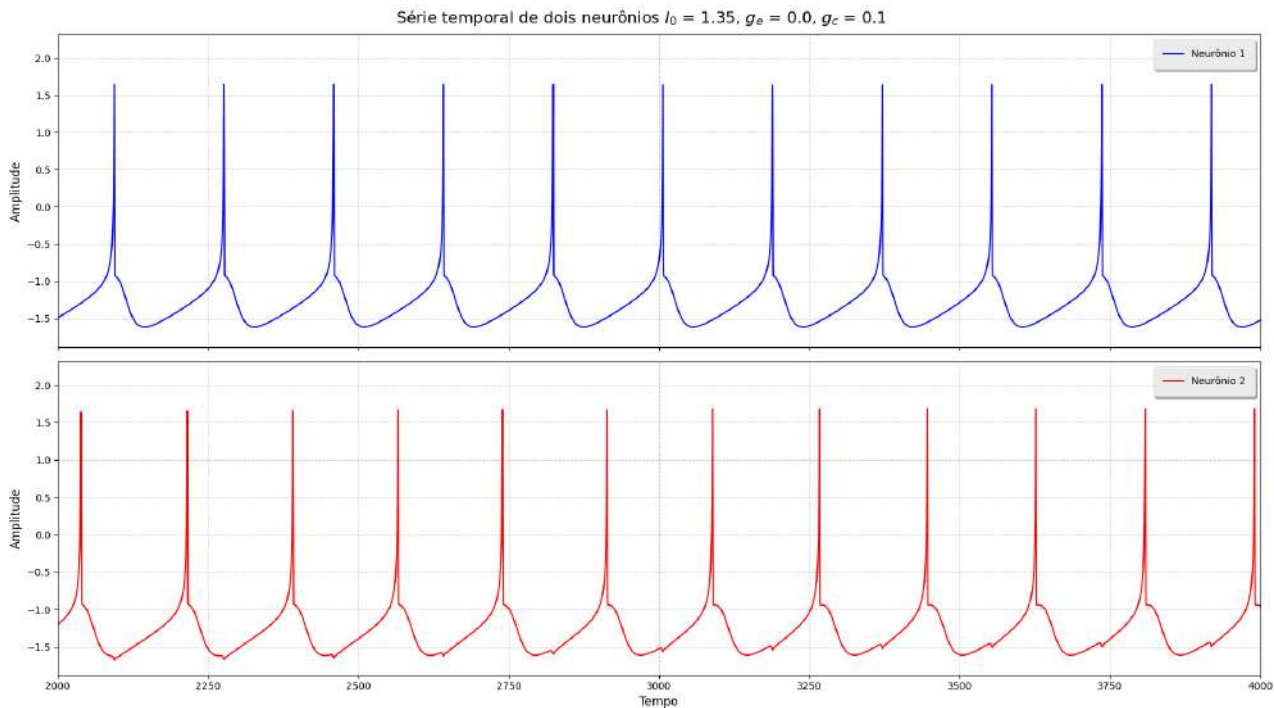
Figura 17 – Séries temporais dos dois neurônios com acoplamento químico $g_c = 1.0$, $I_0 = 1.35$ e $g_e = 0.0$ - 1D



Fonte: elaborado pela própria autora.

Já na Figura 18, o acoplamento químico é significativamente mais fraco ($g_c = 0,1$). Nesse caso, os neurônios exibem padrões de disparo menos coordenados, com sinais de dessincronização e menor regularidade temporal.

Figura 18 – Séries temporais dos dois neurônios com acoplamento químico $g_c = 0,1$, $I_0 = 1,35$ e $g_e = 0,0 - 1D$



Fonte: elaborado pela própria autora.

Com $g_c = 1,0$, Figura 17, observa-se que o neurônio 1 (curva azul) apresenta oscilações regulares com picos únicos, bem definidos e espaçados de forma constante. Em contraste, o neurônio 2 (curva em vermelho) manifesta uma atividade mais complexa, caracterizada por episódios de duplos picos. Esse comportamento mostra que, sob um acoplamento químico forte, a interação entre os neurônios não promove sincronia perfeita. Isso sugere que o acoplamento químico intenso tem um papel destabilizador ou modulador sobre a atividade do segundo neurônio.

Com um valor de $g_c = 0,1$, Figura 18, o neurônio 1 e o neurônio 2 apresentam oscilações regulares, com picos bem sincronizados e espaçamento constante. Não se observa mais a dinâmica de *burst* no segundo neurônio, e os dois sinais estão altamente correlacionados. Ou seja que um acoplamento químico mais fraco tende a estabilizar a atividade conjunta dos neurônios, promovendo sincronia e eliminando comportamentos oscilatórios complexos.

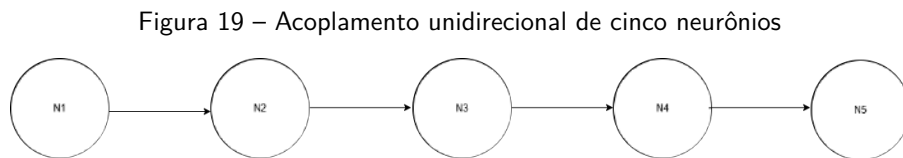
Essa transição entre regimes dinâmicos evidencia a sensibilidade do sistema à intensidade das conexões químicas e pode ter implicações na compreensão de fenômenos cerebrais como ritmos oscilatórios complexos, coordenação entre populações neuronais e até mesmo manifestações patológicas, como crises epiléticas, Jirsa *et al.* (2014).

4 REDES NEURAIS

Este capítulo investiga a dinâmica coletiva de redes neurais compostas por múltiplos neurônios de Hindmarsh-Rose acoplados. Inicialmente, analisa-se a propagação de sinais em configurações unidimensionais de cinco neurônios, examinando os efeitos do acoplamento elétrico e químico em diferentes intensidades. Em seguida, estende-se o estudo para topologias bidimensionais que incorporam loops de realimentação, estruturas fundamentais em circuitos neurais biológicos. A sincronização neuronal é quantificada através de análises de fase relativa e diagramas de dispersão temporal, permitindo caracterizar padrões de coerência e defasagem na atividade coletiva. Os resultados demonstram como a arquitetura da rede e a intensidade do acoplamento modulam a capacidade de sincronização, estabelecendo bases para compreender processos de comunicação neural em sistemas biológicos.

4.1 ACOPLAMENTO ENTRE MÚLTIPLOS NEURÔNIOS

Para se estudar a propagação de informação entre neurônios iniciou-se a investigação com a configuração mais simples de uma rede unidimensional. Usando apenas cinco neurônios acoplados dois a dois unidirecionalmente como se ilustra na Figura 19.



Fonte: elaborado pela própria autora.

4.1.1 Acoplamento elétrico de múltiplos neurônios

Para testar o acoplamento elétrico neste tipo de topologia foram utilizados também dois valores de g_e : 1.0 e 0.1, como na secção 3.3.2. Os resultados se apresentam nas Figuras 20 e 21. A sincronização dos cinco neurônios foi determinada a partir da *fase cruzada* ou *fase-relativa* entre pares de neurônios, apresentadas nas Figuras 22 e 23. Cada subgráfico exibe uma dispersão dos tempos de disparo entre dois neurônios distintos ao longo da simulação. A coloração dos pontos representa a evolução temporal do sistema. Observa-se que alguns pares apresentam agrupamentos próximos à diagonal principal (linha tracejada vermelha), indicando sincronia, enquanto outros mostram dispersões alongadas, associadas a defasagens sistemáticas.

A fase cruzada $\phi_{ij}(t)$ entre dois neurônios i e j é definida como

$$\phi_{ij}(t) = 2\pi \frac{t_j - t_i}{T_i}, \quad (4.1)$$

em que t_i é o instante do disparo do neurônio de referência i , T_i é o período médio entre disparos consecutivos de i , e t_j é o instante de disparo do neurônio j no mesmo ciclo. Valores de $\phi_{ij}(t) \approx 0$ (ou múltiplos de 2π) indicam disparos quase síncronos, enquanto defasagens aproximadamente constantes sugerem liderança ou atraso sistemático entre os neurônios. Já variações significativas de $\phi_{ij}(t)$ ao longo da simulação são típicas de sincronização parcial ou fraca. Esse tipo de análise permite identificar padrões de liderança e atrasos relativos na dinâmica coletiva da rede.

Construção dos diagramas de fase entre pares de neurônios

Para investigar as relações temporais entre os disparos dos neurônios, foi construído um conjunto de gráficos de dispersão que representam as coincidências de fase entre todos os pares possíveis de neurônios na rede. Esses diagramas são baseados nos instantes de disparo (ou picos) de cada neurônio.

Sejam $\{t_i^k\}$ os tempos de disparo do neurônio i , com $k = 1, 2, \dots, N_i$, e $\{t_j^l\}$ os tempos de disparo do neurônio j . Para cada t_i^k , identifica-se o disparo $t_j^{l(k)}$ do neurônio j que satisfaz:

$$|t_j^{l(k)} - t_i^k| = \min_l \{|t_j^l - t_i^k|\}, \quad \text{com} \quad |t_j^l - t_i^k| < \Delta t \quad (4.2)$$

Onde Δt é uma janela de tolerância (ex: 50 ms), que define o intervalo máximo permitido para associar dois disparos como relacionados.

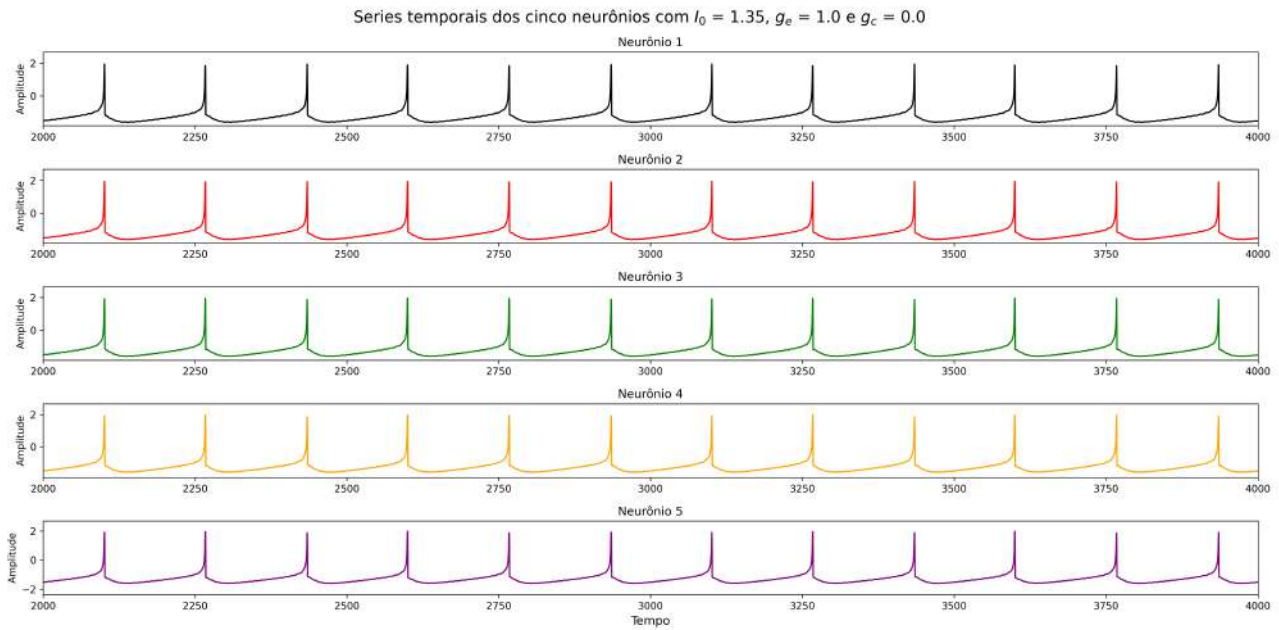
Esses pares $(t_i^k, t_j^{l(k)})$ são então plotados em um gráfico de dispersão bidimensional, onde:

- O eixo x representa os tempos de disparo do neurônio pré-sináptico i ; - O eixo y representa os tempos correspondentes do neurônio pós-sináptico j ; - A coloração dos pontos representa o tempo absoluto t , para evidenciar a evolução temporal da relação.

A diagonal de referência $y = x$ (representada por linha tracejada vermelha) indica sincronia perfeita entre os dois neurônios. Dispersões sistemáticas acima ou abaixo dessa linha indicam defasagem e liderança.

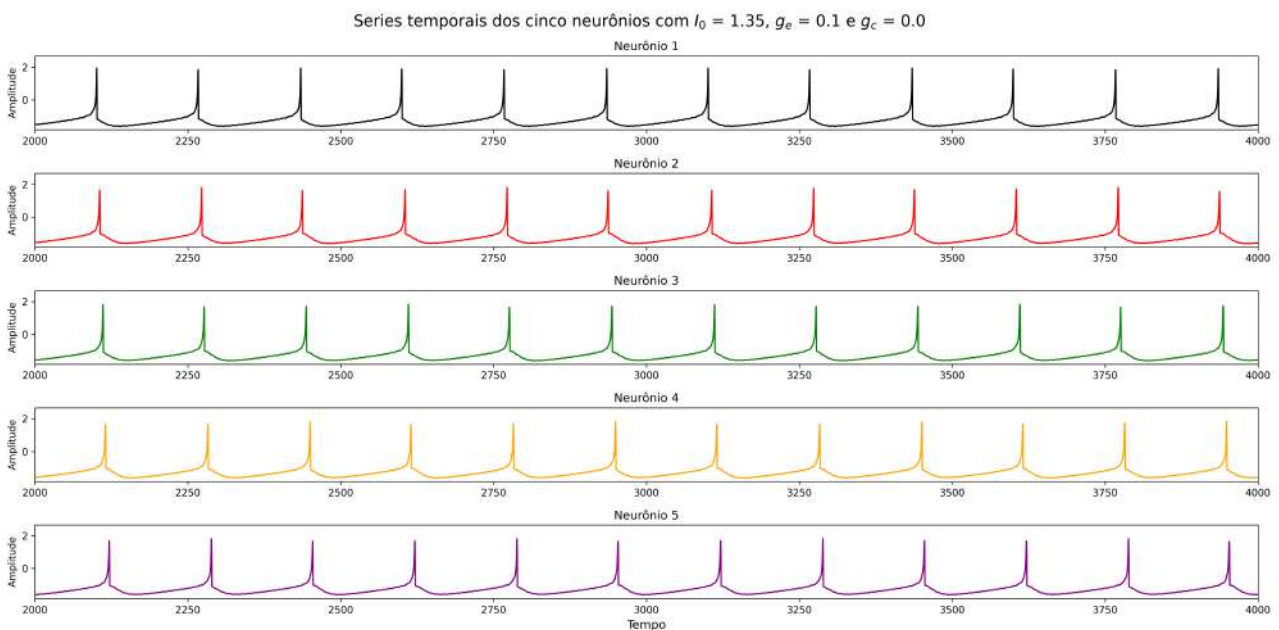
Nas Figuras 20 e 21, é possível observar que os neurônios exibem oscilações regulares e bastante semelhantes entre si. Apesar dessa similaridade, pequenas defasagens temporais revelam a ausência de sincronização completa. Isso indica que um acoplamento excitatório fraco ($g_e = 0, 1$) não é suficiente para garantir coerência temporal total entre os neurônios, permitindo que cada um mantenha um ritmo próprio, ainda que muito próximo dos demais.

Figura 20 – Séries temporais dos cinco neurônios com acoplamento elétrico $g_e = 1.0$, $I_0 = 1.35$ e $g_c = 0.0$ - 1D



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 21 – Séries temporais dos cinco neurônios com acoplamento elétrico $g_e = 0.1$, $I_0 = 1.35$ e $g_c = 0.0$ - 1D



Fonte: elaborado pela própria autora.

Esse comportamento se torna ainda mais evidente quando se examina a dinâmica temporal da rede com diferentes representações. A Figura 23 mostra que os disparos neuronais ocorrem de forma quase idêntica, com picos sincronizados entre todos os neurônios — um indicativo de forte coerência na atividade elétrica mesmo com acoplamento moderado.

Complementando essa análise, a Figura 22 apresenta as relações de fase entre os pares neuronais. Cada subgráfico exibe um par específico, com os pontos coloridos conforme a progressão do tempo.

Figura 22 – Relações de fase entre os pares de neurônios com $g_e = 1.0$, $I_0 = 1.35$ e $g_c = 0.0$ - 1D

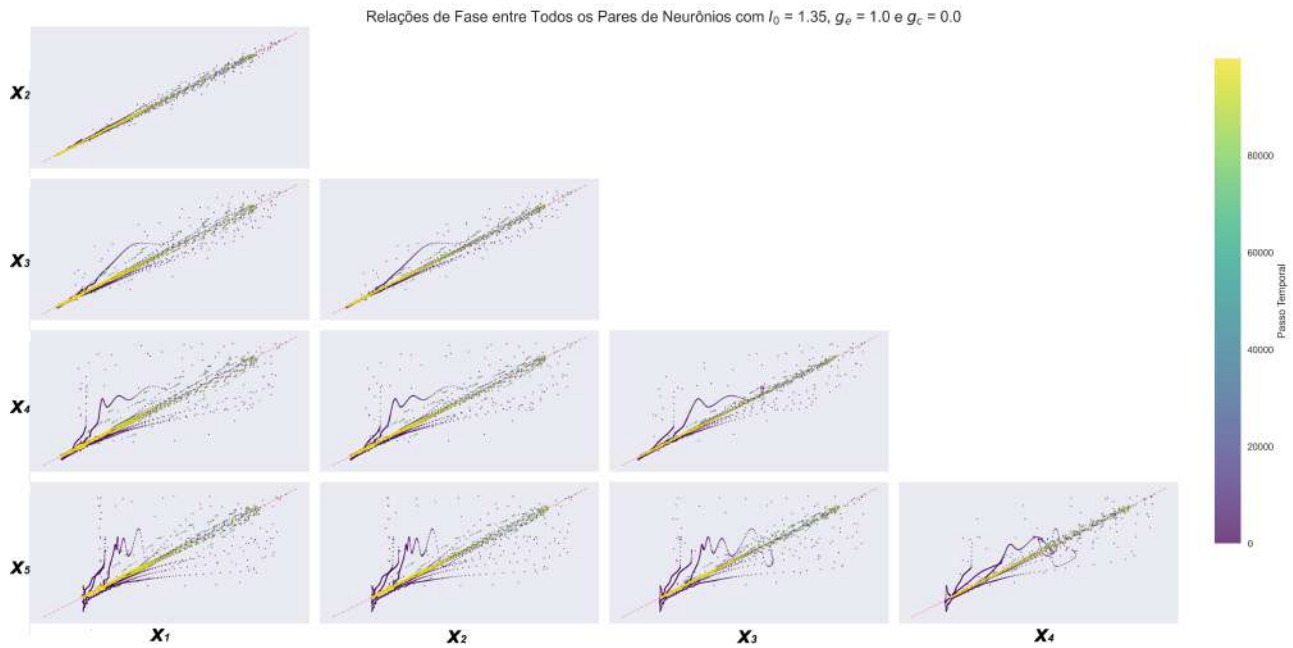
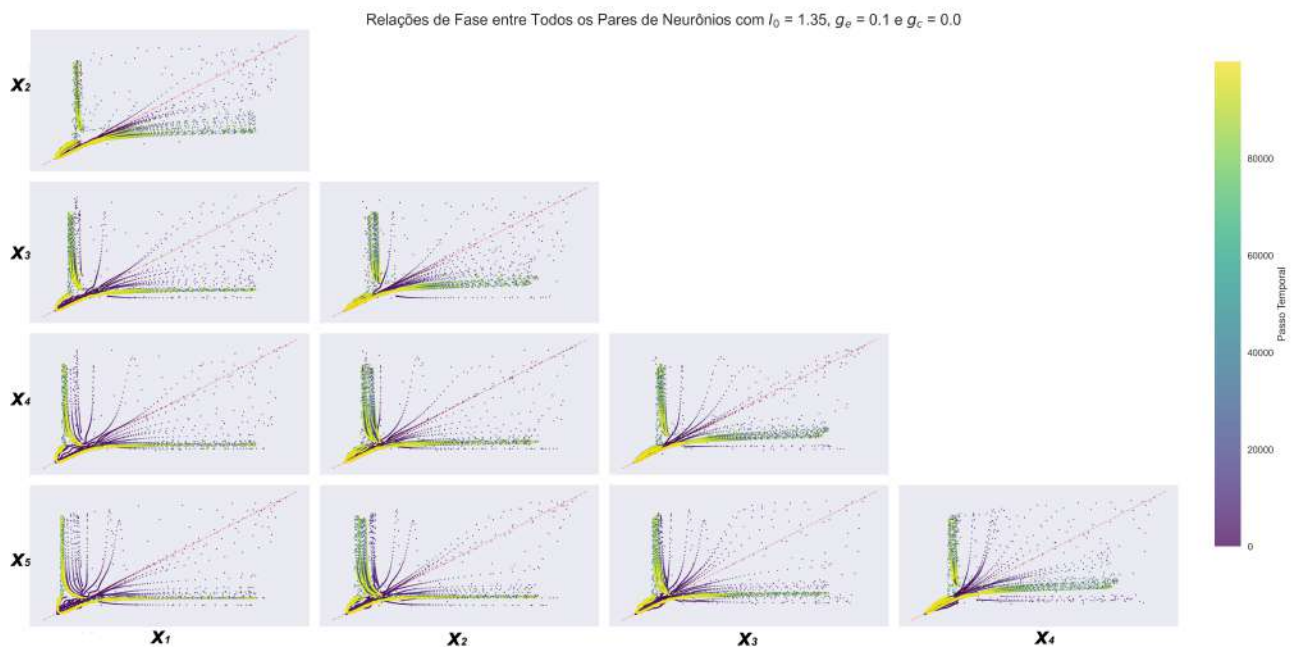


Figura 23 – Relações de fase entre os pares de neurônios com $g_e = 0.1$, $I_0 = 1.35$ e $g_c = 0.0$ - 1D



A proximidade dos pontos com a reta de identidade (linha tracejada) reflete forte sincronização de fase e correlação entre os neurônios.

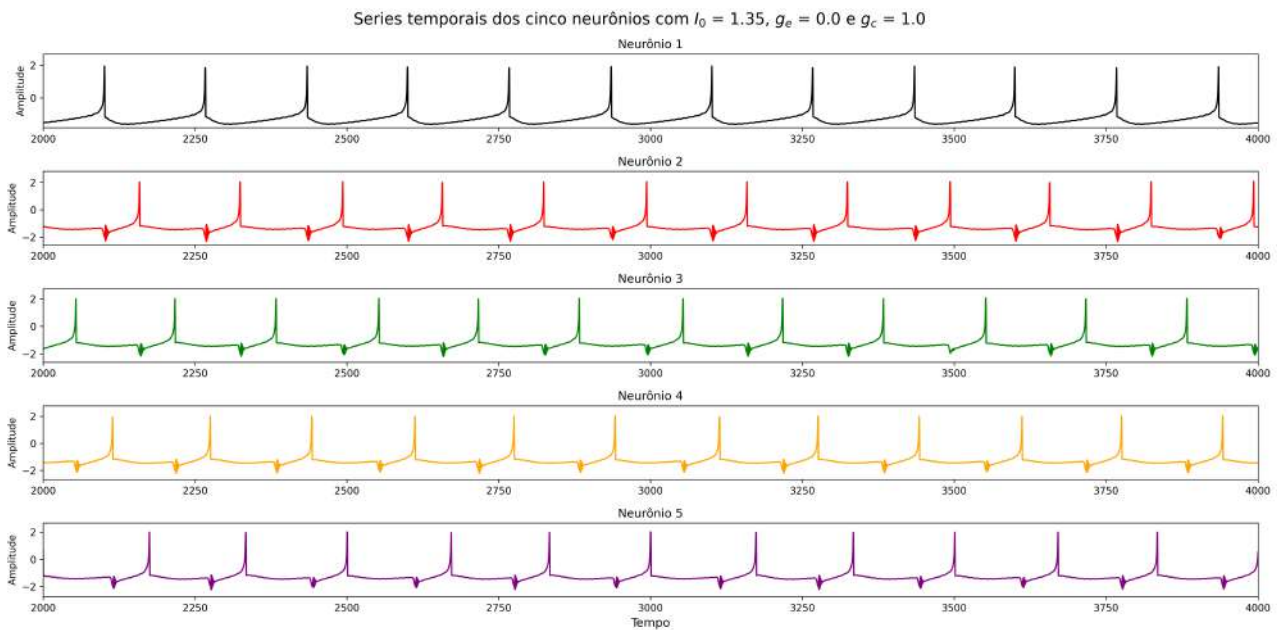
É possível notar que os pares (Neurônio 5, Neurônio 1) e (Neurônio 4, Neurônio 1) apresentam desvios mais evidentes nos instantes iniciais da simulação. No entanto, esses desvios são transitórios: com o avanço do tempo, observa-se a convergência das trajetórias médias (linhas sólidas coloridas) para a linha de identidade, em um movimento espiral característico. Esse comportamento, reforçado

pelo gradiente de cores da barra lateral, sugere que o sistema evolui para um regime estável, com alta coerência temporal entre os neurônios.

4.1.2 Acoplamento químico de múltiplos neurônios

Para testar o acoplamento químico foram utilizados também dois valores de g_c (1.0 e 0.1). Os resultados se apresentam nas Figuras 24 e 25.

Figura 24 – Séries temporais dos cinco neurônios com acoplamento químico $g_c = 1.0$, $I_0 = 1.35$ e $g_e = 0.0$ - 1D



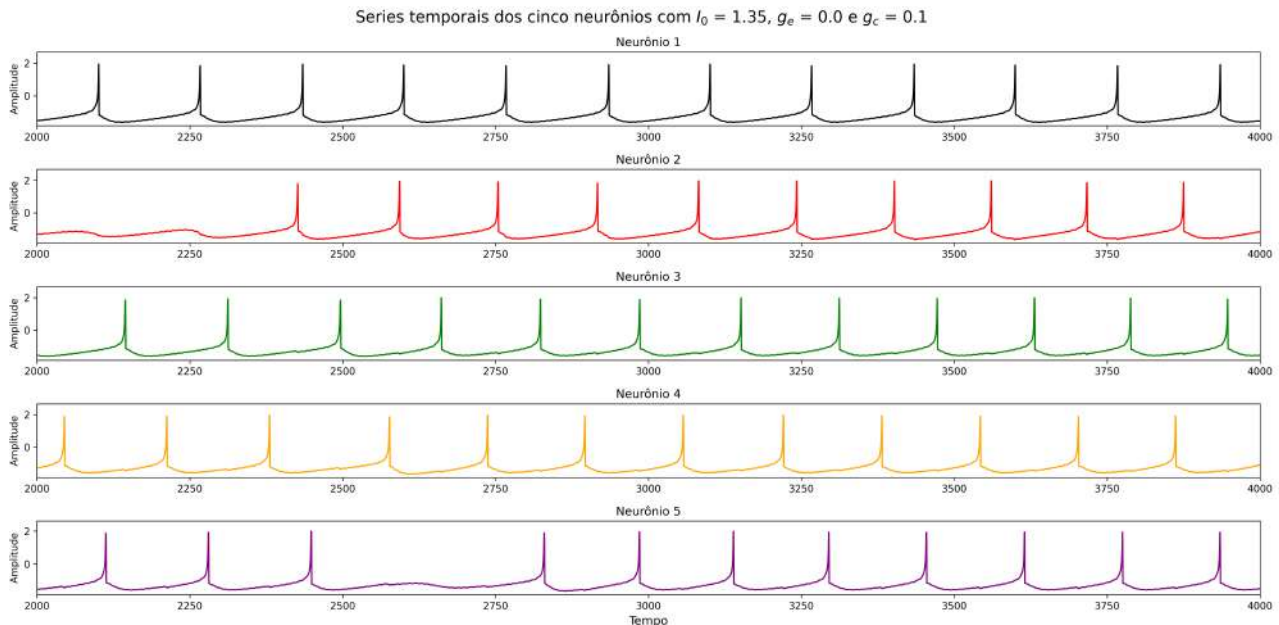
Fonte: elaborado pela própria autora.

Observa-se um alto grau de sincronização entre os cinco neurônios, ver Figura 24, com $g_c = 1.0$ todos os neurônios disparam de forma aproximadamente simultânea, apresentando alta coincidência temporal entre seus potenciais de ação., com oscilações regulares e padrão semelhante de amplitude e forma. Os picos apresentam subida rápida seguida por uma queda suave. Essa forte coerência temporal é típica de redes fortemente acopladas, onde a atividade de um neurônio afeta diretamente os demais, promovendo sincronia global.

Em contraste, a Figura 25, com $g_c = 0.1$, revela uma redução clara na sincronia entre os neurônios, embora todos continuem apresentando comportamento oscilatório, os tempos de disparo tornam-se levemente deslocados entre os neurônios. O neurônio 1 mantém um padrão bastante regular, mas neurônios como o 2 e o 3 mostram pequenas variações de fase, indicando que o acoplamento mais fraco permite maior autonomia individual na dinâmica de cada célula. Além disso, os picos tornam-se menos uniformes entre os neurônios.

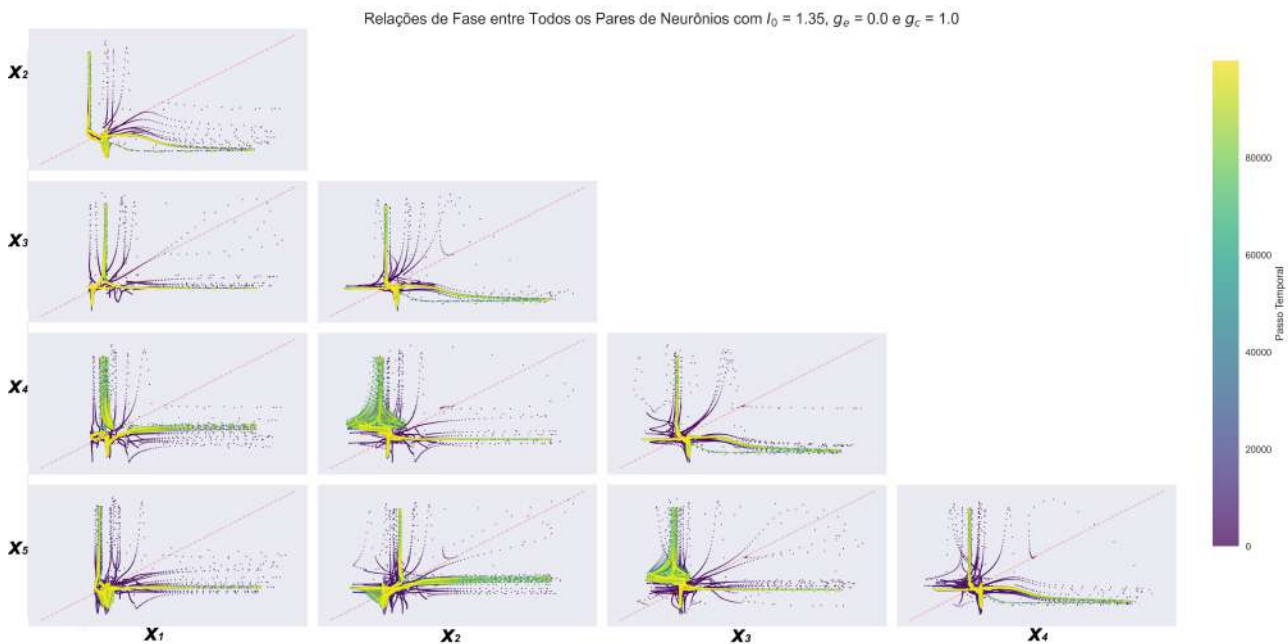
Essa comparação mostra a importância do parâmetro g_c na dinâmica coletiva da rede. Valo-

Figura 25 – Séries temporais dos cinco neurônios com acoplamento químico $g_c = 0.1$, $I_0 = 1.35$ e $g_e = 0.0$ - 1D



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 26 – Relações de fase entre os pares de neurônios com $g_c = 1.0$, $I_0 = 1.35$ e $g_e = 0.0$ - 1D

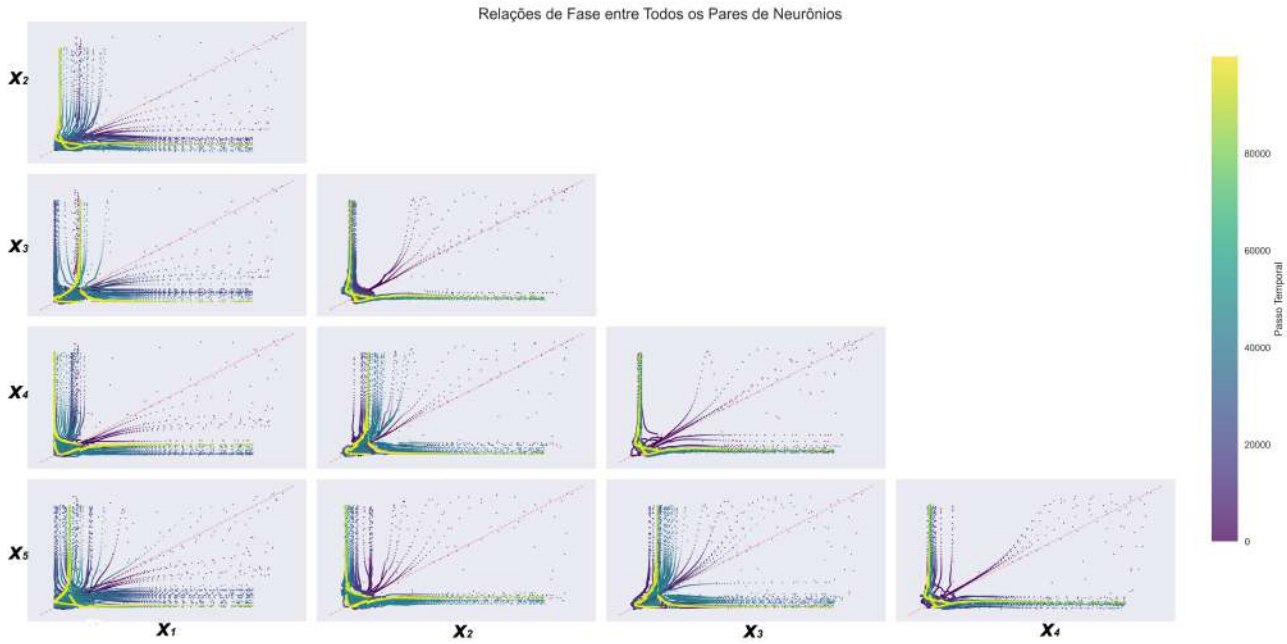


Fonte: elaborado pela própria autora.

res mais altos de acoplamento favorecem estados sincronizados, relevantes em funções cognitivas que exigem coordenação neural, enquanto valores mais baixos promovem diversidade de comportamento, potencialmente úteis para processamentos paralelos e independentes (combinação de tipos de sinapses não analisadas neste trabalho). A modulação de g_c pode, portanto, ser um mecanismo fundamental para controlar o equilíbrio entre coerência e variabilidade na atividade neural.

Nas relações de fase entre os pares de neurônios com $g_c = 0.1$, observa-se uma dispersão

Figura 27 – Relações de fase entre os pares de neurônios com $g_c = 0.1$, $I_0 = 1.35$ e $g_e = 0.0 - 1D$



Fonte: elaborado pela própria autora.

considerável dos pontos em torno da diagonal, refletindo uma dinâmica menos sincronizada entre os pares de neurônios. Os padrões de fase são distribuídos com maior variabilidade ao longo do tempo, indicando que a influência inibitória entre os neurônios é fraca, permitindo maior independência nas oscilações individuais.

Por outro lado, as relações de fase entre os pares de neurônios com $g_c = 1.0$, revelam uma organização muito mais acentuada dos padrões de fase, com acúmulo de trajetórias próximas à diagonal. Esse comportamento indica sincronização mais forte ou padrões recorrentes, promovidos pelo maior acoplamento inibitório. A coerência observada nas trajetórias de disparo sugere uma dinâmica coletiva.

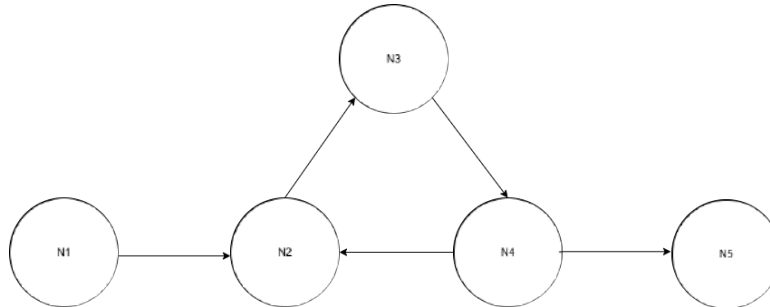
4.2 TOPOLOGIA BIDIMENSIONAL

Após a análise em redes unidimensionais, foi implementada uma configuração com topologia bidimensional, conforme ilustrado na Figura 28, a fim de investigar os efeitos da realimentação (loop) no comportamento coletivo dos neurônios. Estruturas recorrentes com realimentação são características fundamentais de redes neurais biológicas, estando associadas à geração de ritmos endógenos e à manutenção de estados dinâmicos estáveis ou multivariados, Pikovsky, Rosenblum e Kurths (2003). Essa arquitetura é particularmente relevante para simular circuitos recorrentes presentes em áreas corticais e redes motoras, como os circuitos talamocorticais e espinocerebelares, nos quais o retorno da informação desempenha papel essencial na coordenação e modulação da atividade neural

(Douglas, 2007), (Brunel, 2000). Tais circuitos são conhecidos por sustentar atividades oscilatórias e modos dinâmicos complexos, incluindo bursting sincronizado e padrões intermitentes.

No caso, o neurônio 2 está acoplado com o neurônio 4, por tanto recebe estímulos dele além do neurônio 1.

Figura 28 – Topologia bidimensional com cinco neurônios na cadeia.

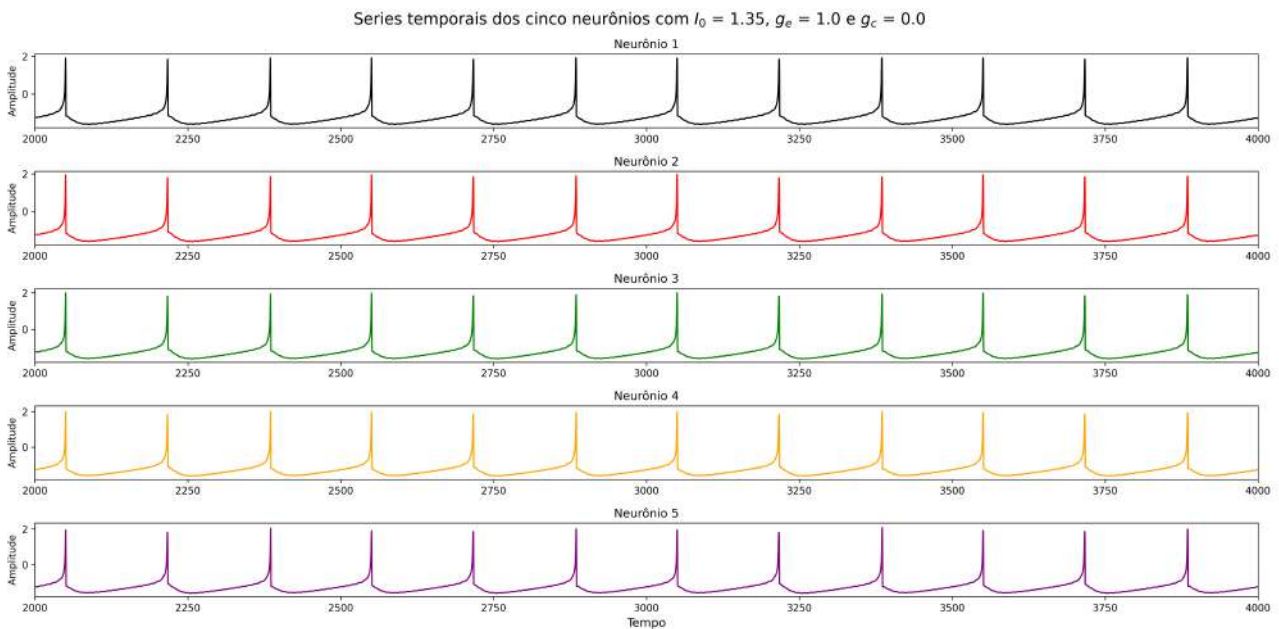


Fonte: elaborado pela própria autora.

4.2.1 Acoplamento elétrico

Nestas análises foram utilizados dois níveis de acoplamento entre os neurônios: 1.0 e 0.1. Os resultados das series temporais se mostram nas Figuras 29 e 30.

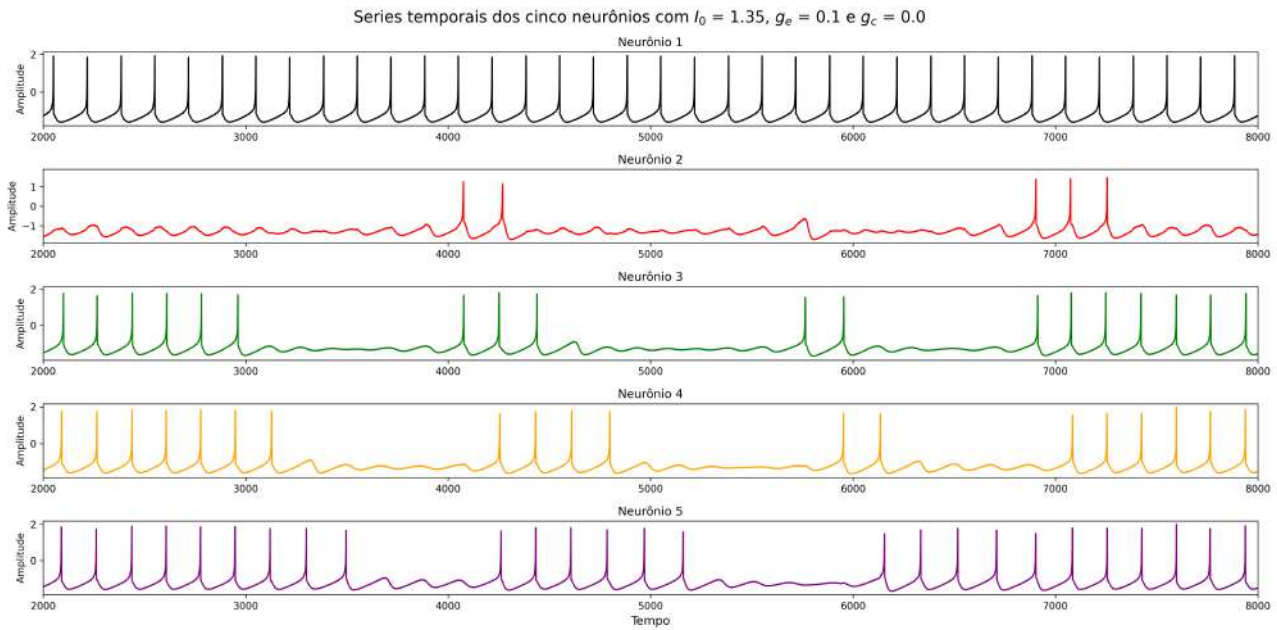
Figura 29 – Séries temporais dos cinco neurônios com acoplamento elétrico $g_e = 1.0$ - 2D



Fonte: elaborado pela própria autora.

Observa-se que, para $g_e = 1.0$, ocorre uma sincronização marcante entre os cinco neurônios. Todos passam a exibir pulsos regulares, com forma de onda praticamente idêntica, tanto em amplitude

Figura 30 – Séries temporais dos cinco neurônios com acoplamento elétrico $g_e = 0.1$ - 2D



Fonte: elaborado pela própria autora.

quanto em frequência. Essa mudança evidencia que um acoplamento excitatório mais forte promove um comportamento coerente entre os neurônios da rede, sincronizando suas dinâmicas oscilatórias.

Em contraste, para $g_e = 0,1$, o Neurônio 1 apresenta uma atividade oscilatória regular, com pulsos bem definidos, característicos de um oscilador mestre. No entanto, os demais neurônios (2 a 5) exibem padrões mais irregulares ou menos sincronizados. Destaca-se o Neurônio 2, cuja atividade é visivelmente mais ruidosa, com oscilações de menor amplitude e picos irregulares, o que sugere baixa coerência com o Neurônio 1.

Para analisar essas anomalias na serie temporal se utilizam as relações de fase entre os pares de neurônios como mostrado nas Figuras 31 e 32.

Na condição com $g_e = 0.1$, observa-se uma dispersão acentuada nos diagramas de fase, com as trajetórias se afastando significativamente da linha de identidade representada pela diagonal tracejada. Esse padrão indica uma baixa correlação de fase entre os neurônios, com atividades oscilatórias que ocorrem de forma descoordenada e com pouca sincronia ao longo do tempo. A dinâmica coletiva da rede, nesse regime, se mostra desordenada, revelando que o acoplamento excitatório fraco não é suficiente para promover coerência entre os elementos da rede.

Em contraste, ao se considerar a configuração com $g_e = 1.0$, nota-se uma mudança marcante no comportamento da rede. As trajetórias se alinham fortemente à diagonal, demonstrando uma alta correlação temporal entre os pares de neurônios. Isso reflete uma sincronização de fase evidente, em que os neurônios oscilam de maneira coordenada ao longo do tempo. A organização observada nas trajetórias e a maior regularidade temporal indicam que o aumento na força do acoplamento

Figura 31 – Relações de fase entre os pares de neurônios com $g_e = 1.0$ - 2D

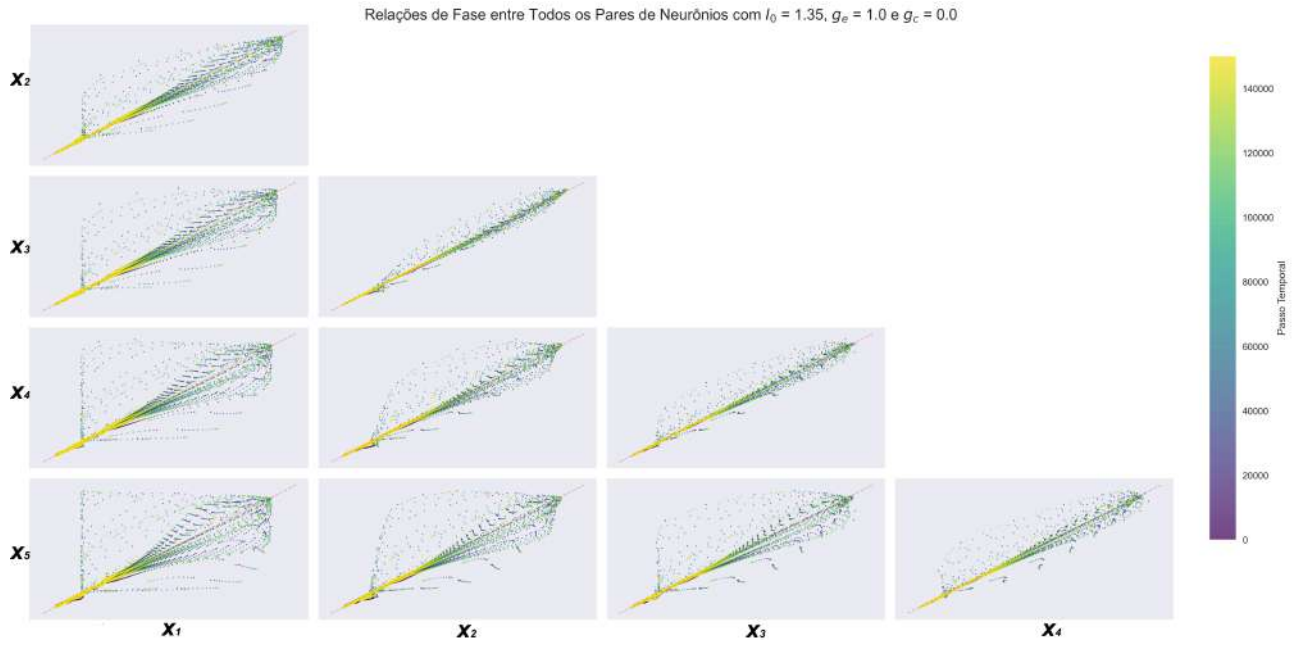
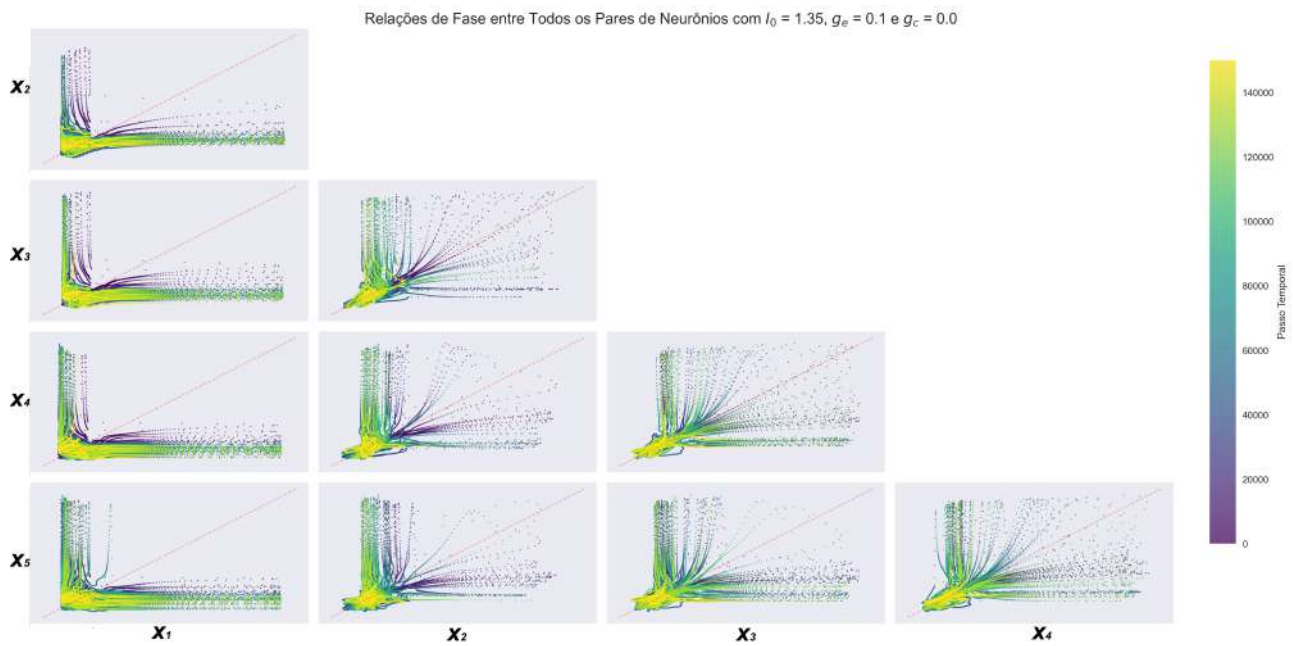


Figura 32 – Relações de fase entre os pares de neurônios com $g_e = 0.1$ - 2D



excitatório induz uma dinâmica coletiva mais estruturada e coesa.

4.2.2 Acoplamento químico

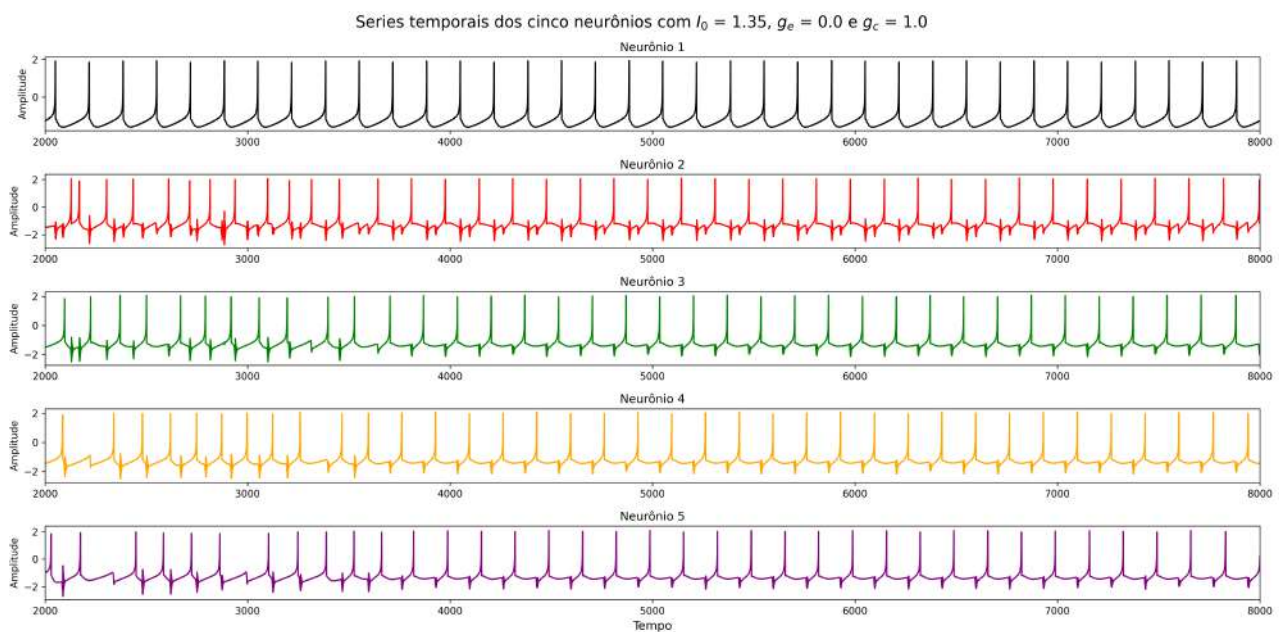
Para investigar o comportamento coletivo de múltiplos neurônios sob a influência do acoplamento químico, foram considerados dois níveis distintos de acoplamento: $g_c = 1,0$ e $g_c = 0,1$. As séries

temporais obtidas em cada configuração são apresentadas nas Figuras 33 e 34, respectivamente.

Com $g_c = 1,0$ (Figura 33), observa-se uma sincronização robusta entre os cinco neurônios. Todos os elementos da rede exibem oscilações quase idênticas em forma, amplitude e fase, indicando que o acoplamento químico forte é capaz de promover um comportamento altamente coerente entre os neurônios. Essa configuração leva a uma dinâmica coletiva unificada, suprimindo variações individuais e evidenciando o papel dominante do acoplamento na coordenação da rede.

Em contraste, no cenário com $g_c = 0,1$ (Figura 34), nota-se que, embora os neurônios 2 a 5 sigam um padrão oscilatório semelhante ao do neurônio mestre (Neurônio 1), persistem discrepâncias nas amplitudes e nos tempos de disparo. O sistema apresenta uma sincronização parcial, caracterizada por correlação moderada entre os sinais e diferenças de fase perceptíveis. Isso sugere que, nesse regime, os neurônios ainda mantêm certo grau de autonomia, mesmo sob influência do acoplamento químico fraco.

Figura 33 – Séries temporais dos cinco neurônios com acoplamento químico $g_c = 1.0$ - 2D



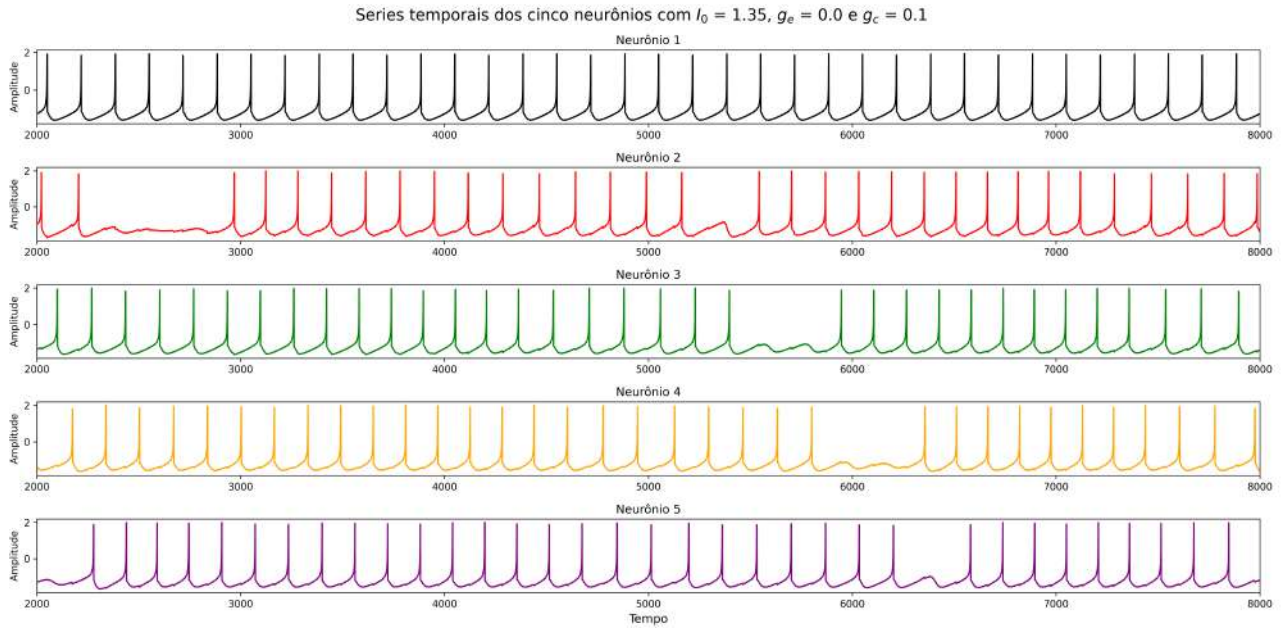
Fonte: elaborado pela própria autora.

Para complementar a análise das series temporais se utilizam as relações de fase entre os pares de neurônios como mostrado nas Figuras 35 e 36.

Na Figura 35, observa-se que os pares de neurônios exibem trajetórias de fase com dispersão significativa, particularmente em pares mais distantes (por exemplo, Neurônio 1 x Neurônio 5). As curvas coloridas, que representam a evolução temporal das fases, mostram um leque de trajetórias que se organizam em torno de regiões distintas do plano de fase, sem convergirem claramente para a linha de identidade (indicada por uma linha tracejada vermelha).

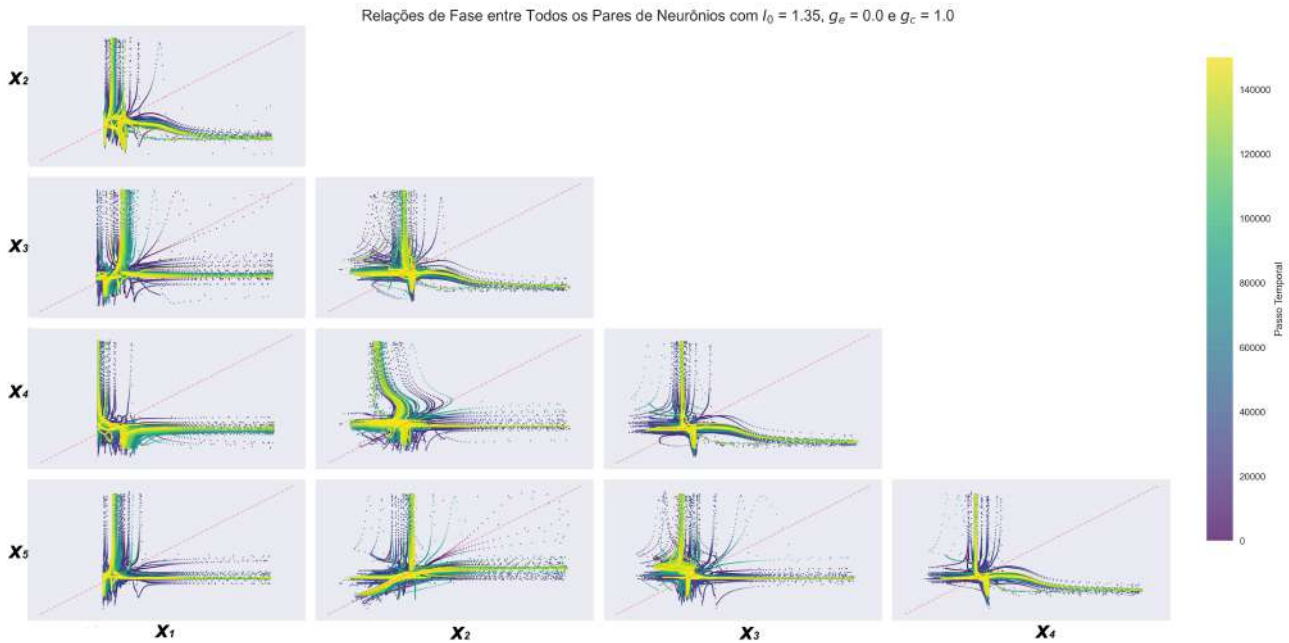
Este comportamento é corroborado pela matriz de fase correspondente (Figura 36), que eviden-

Figura 34 – Séries temporais dos cinco neurônios com acoplamento químico $g_c = 0.1$ - 2D



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 35 – Relações de fase entre os pares de neurônios com $g_c = 1.0$ - 2D

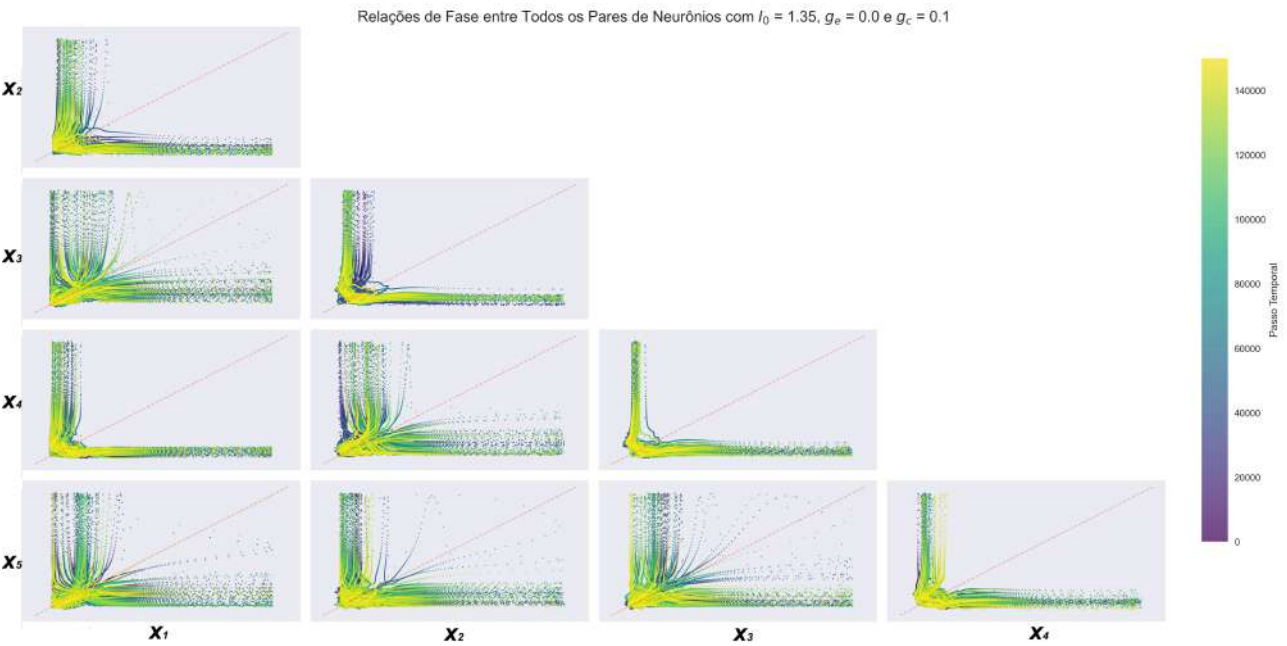


Fonte: elaborado pela própria autora.

cia uma distribuição de fases assimétrica e menos concentrada, com padrões que se afastam das diagonais principais. Isso sugere que, apesar de existir alguma correlação entre os pares de neurônios, o acoplamento elétrico fraco não é suficiente para induzir uma sincronização robusta.

Tendo todos estes resultados apresentados podemos esperar certos padrões de comportamento como se mostra no quadro 1.

Figura 36 – Relações de fase entre os pares de neurônios com $g_c = 0.1$ - 2D



Fonte: elaborado pela própria autora.

Quadro 1 – Resumo dos efeitos da força de acoplamento na sincronização neuronal em topologia bidimensional.

Tipo de acoplamento	Força do acoplamento	Comportamento observado
Elétrico	$g_e = 1,0$	Sincronização completa, pulsos regulares e alta coerência
Elétrico	$g_e = 0,1$	Atividade irregular, baixa coerência e baixa correlação de fase
Químico	$g_c = 1,0$	Sincronização robusta
Químico	$g_c = 0,1$	Sincronização parcial, variações de fase e autonomia relativa

Nota: Para $g = 1,0$, os pares de neurônios exibiram trajetórias fortemente alinhadas à diagonal, indicando sincronização. Para $g = 0,1$, observou-se maior dispersão e variações de fase, indicando baixa sincronização.

Fonte: elaborado pela própria autora.

5 RUIDO

A presença de ruído em sistemas neurais é um fenômeno inevitável e, muitas vezes, funcionalmente relevante. Diversas evidências experimentais sugerem que o ruído pode tanto comprometer quanto favorecer a transmissão de sinais em redes neurais, dependendo de sua intensidade e da configuração estrutural da rede. No contexto dos modelos dinâmicos, o ruído é frequentemente introduzido como uma perturbação nas variáveis do sistema, permitindo a análise de sua influência sobre a coerência, sincronização e estabilidade das oscilações neuronais.

Neste capítulo, investiga-se o impacto da adição de ruído branco gaussiano à corrente de entrada do modelo HR, com o objetivo de compreender como diferentes intensidades de perturbação afetam a dinâmica individual e coletiva dos neurônios. A abordagem é aplicada inicialmente a um único neurônio, permitindo avaliar os efeitos locais e isolados do ruído sobre a regularidade do disparo. Em seguida, expande-se a análise para redes com múltiplos neurônios organizados em topologias unidimensionais e bidimensionais, explorando diferentes regimes de acoplamento (elétrico e químico) e suas interações com o ruído.

As métricas utilizadas incluem a série temporal da atividade neuronal, a densidade espectral de potência e a relação sinal-ruído (SNR), fornecendo um panorama quantitativo e qualitativo dos efeitos induzidos por variações no parâmetro de intensidade do ruído (β). Os resultados obtidos neste capítulo complementam os estudos anteriores sobre a propagação e coerência dos impulsos neurais, oferecendo uma perspectiva mais realista sobre o comportamento de redes neurais sujeitas a flutuações externas.

O termo ruído é em geral usado para definir qualquer componente indesejável na observação das características de um sinal, Cabella (2008). No sistema de estudo deste trabalho foi adicionado um ruído na corrente de entrada I_0 do modelo neural de HR no primeiro neurônio de uma rede. No código Paython a componente adicionada é de ruído branco gaussiano, ou seja, um ruído com distribuição normal. A definição da corrente é:

A corrente externa I é modelada como:

$$I = I_0 + \beta \cdot \varepsilon \quad (5.1)$$

onde ε segue uma distribuição normal padrão, ou seja, $\varepsilon \sim N(0, 1)$.

Aqui, I_0 é o valor médio da corrente, e β está associada a largura da distribuição.

Dessa forma, I também segue uma distribuição normal com média I_0 e variância β^2 :

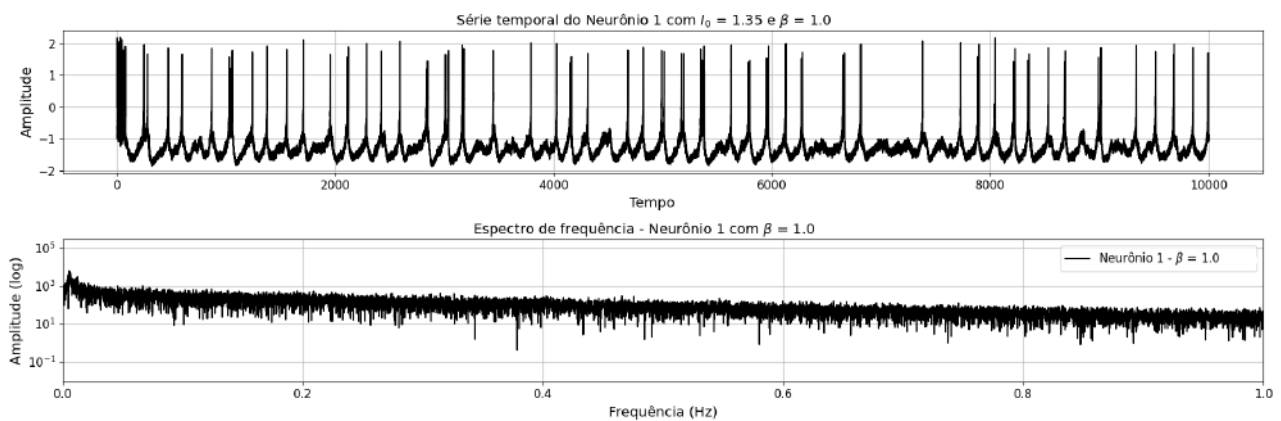
$$I \sim N(I_0, \beta^2). \quad (5.2)$$

A inclusão do ruído no modelo HR nos ajudou a entender melhor como a excitação neural se propaga. A relevância desse estudo vem do fato que o ruído não é apenas uma interferência, mas faz parte da dinâmica do sistema nervoso influenciando a comunicação entre neurônios. Com essa abordagem, o modelo aqui investigado fica mais próximo da realidade biológica, onde pequenas variações aleatórias afetam o funcionamento das redes neurais.

5.1 UM NEURÔNIO

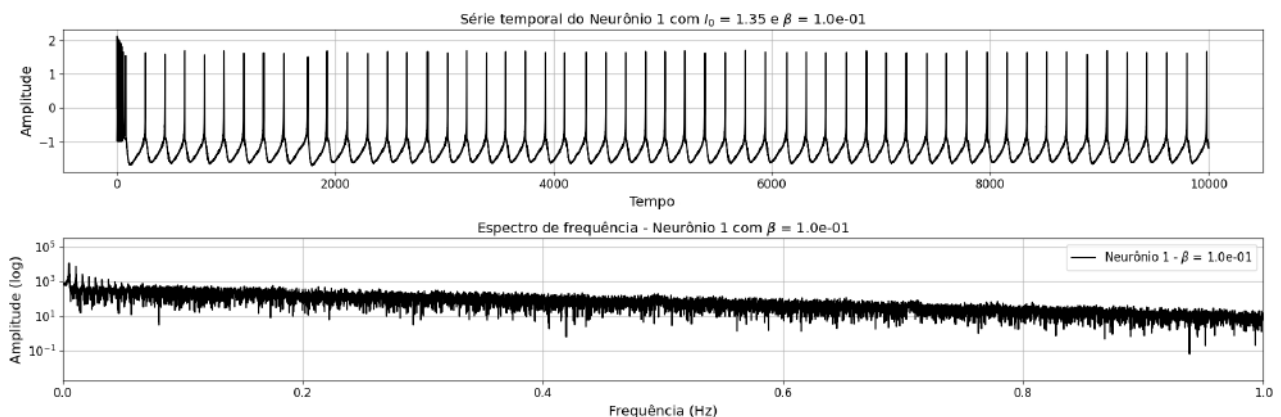
Nesta seção são apresentados os resultados de adição de ruído unicamente utilizando um neurônio para observar a sua incidência na corrente.

Figura 37 – Série temporal e espectro de frequência de um neurônio com $I_0 = 1.35$ e $\beta = 1.0 \cdot 10^0$



Fonte: elaborado pela própria autora.

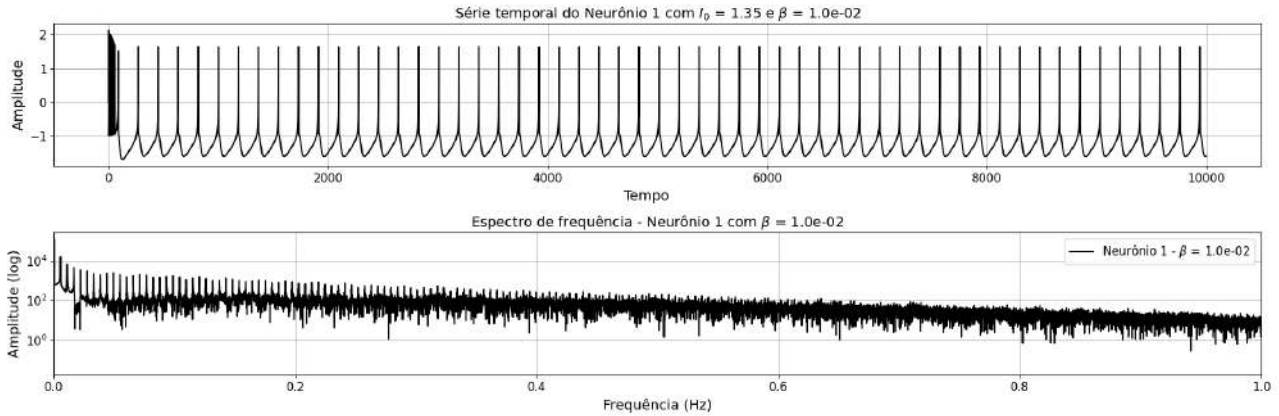
Figura 38 – Série temporal e espectro de frequência de um neurônio com $I_0 = 1.35$ e $\beta = 1.0 \cdot 10^{-1}$



Fonte: elaborado pela própria autora.

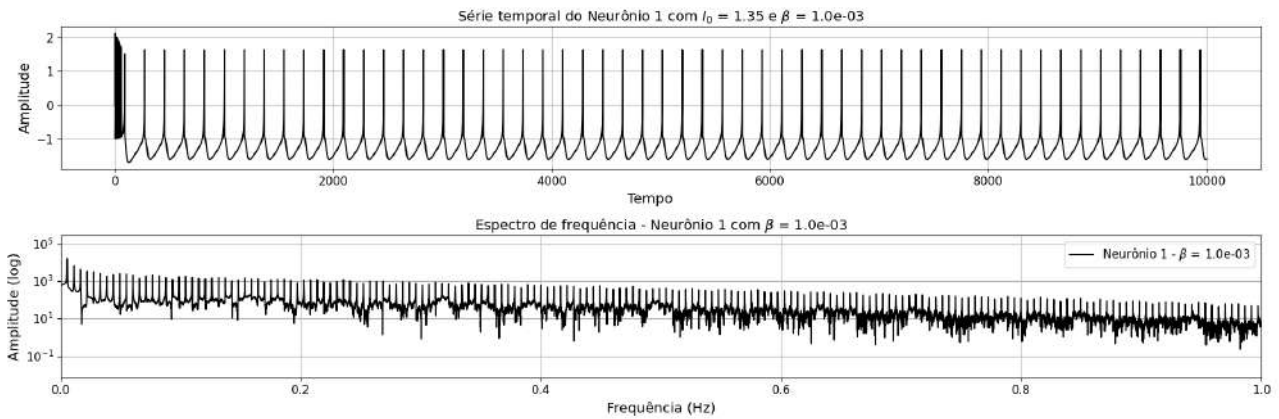
As Figuras 37, 38, 39 e 40 apresentam a evolução da série temporal e do espectro de potência da atividade de um neurônio para diferentes valores do parâmetro β . Observa-se que, à medida que β diminui, a série temporal torna-se visivelmente mais regular e menos desordenada.

Figura 39 – Série temporal e espectro de frequência de um neurônio com $I_0 = 1.35$ e $\beta = 1.0 \cdot 10^{-2}$



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 40 – Série temporal e espectro de frequência de um neurônio com $I_0 = 1.35$ e $\beta = 1.0 \cdot 10^{-3}$



Fonte: elaborado pela própria autora.

Para $\beta = 1.0$, a dinâmica do neurônio é altamente irregular, com o espectro de potência apresentando energia distribuída em uma ampla faixa de frequências. Conforme β é reduzido para 10^{-1} e 10^{-2} , nota-se uma transição para um comportamento mais periódico, com o surgimento de picos mais definidos no espectro de potência. Com $\beta = 10^{-3}$, a atividade do neurônio é praticamente regular, refletindo um sinal periódico, o que é evidenciado pela concentração espectral em frequências bem definidas, ver Figura 40.

5.2 TOPOLOGIA UNIDIMENSIONAL COM MÚLTIPLOS NEURÔNIOS

Utilizando a topologia da Figura 19, foi adicionado ruído na corrente do primeiro neurônio, variando a sua intensidade e também o valor do acoplamento entre os neurônios da cadeia.

5.2.1 Análise do sinal

Para analisar a incidência de ruído foi utilizado um método simples de subtração dos sinais no tempo, onde o sinal original é $x(t)$ e o sinal ruidoso $x_r(t)$, a diferença entre eles é simplesmente, calculado por:

$$s(t) = x_r(t) - x(t) \quad (5.3)$$

Que revela como o ruído afeta a dinâmica do sistema ao longo do tempo.

A relação sinal-ruído (SNR- Signal to Noise Ratio), medida em decibel (dB) quantifica a relação entre a característica que se quer observar (sinal) e as variabilidades provenientes de outras fontes (ruído). Quanto maior o valor dessa relação, menor é a interferência associada ao ruído, Cabella (2008). O cálculo da relação sinal-ruído (SNR) baseia-se na razão entre a potência do sinal e a potência do ruído, definido por:

$$\text{SNR} = \frac{P_s}{P_r} \quad (5.4)$$

Onde:

- P_s é a potência média do sinal.
- P_r é a potência média do ruído.

Para calcular a potência, no sistema em estudo se utilizou:

$$P = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad (5.5)$$

Onde x_i é o valor do sinal ou ruído em cada instante de tempo.

Para converter o SNR para decibéis [dB], usamos:

$$\text{SNR} = 10 \log_{10}(\text{SNR})[dB] \quad (5.6)$$

Esta ferramenta será utilizada para avaliar o sinal de saída na cadeia de neurônios.

Nas seguintes seções, são analisados os efeitos da introdução de ruído branco gaussiano sobre redes neurais compostas por múltiplos neurônios dispostos em topologia unidimensional. O estudo concentra-se na dinâmica de propagação dos sinais neuronais ao longo da cadeia quando o ruído é aplicado à corrente de entrada do primeiro neurônio. Serão testadas diferentes intensidades de ruído e examinadas as respostas da rede em termos de séries temporais e métricas quantitativas, como a relação sinal-ruído (SNR). Também é considerada a influência de distintos parâmetros de acoplamento entre os neurônios na sensibilidade da rede às perturbações externas. O objetivo é avaliar como a estrutura e a conectividade do sistema afetam a robustez e a coerência da atividade neural diante da presença de ruído.

No Quadro 2 pode-se observar as variações feitas dos parâmetros que se analisam a partir da seção 5.2.2.

Quadro 2 – Resumo dos efeitos da força de acoplamento na sincronização neuronal em topologia bidimensional.

Tipo de Acoplamento	Força do Acoplamento	Comportamento Observado
Elétrico	$g_e = 1,0$	Sincronização completa, pulsos regulares e alta coerência
Elétrico	$g_e = 0,1$	Atividade irregular, baixa coerência e baixa correlação de fase
Químico	$g_c = 1,0$	Sincronização robusta
Químico	$g_c = 0,1$	Sincronização parcial, variações de fase e autonomia relativa

Nota: Para $g = 1,0$, os pares de neurônios exibiram trajetórias fortemente alinhadas à diagonal, indicando sincronização. Para $g = 0,1$, observou-se maior dispersão e variações de fase, indicando baixa sincronização.

Fonte: elaborado pela própria autora.

5.2.2 Acoplamento elétrico $g_e = 1.0$

Esta subseção apresenta os primeiros resultados numéricos obtidos para a propagação de sinais em uma rede linear de cinco neurônios acoplados eletricamente, sob influência de ruído aditivo. O sistema é modelado pelas equações de Hindmarsh-Rose, com corrente de entrada constante $I_0 = 1,35$, situada no regime oscilatório do modelo. A intensidade de acoplamento elétrico é fixada em $g_e = 1,0$, e o parâmetro de ruído β é variado em cinco valores: 0, 10^{-3} , 10^{-2} , 10^{-1} e 1.

O objetivo desta análise inicial é investigar como a introdução progressiva de ruído afeta a dinâmica temporal dos neurônios, com foco em dois aspectos principais: (i) as alterações qualitativas nas séries temporais dos potenciais de membrana ao longo da rede; e (ii) a evolução da razão sinal-ruído (SNR) como medida quantitativa da degradação do sinal.

As Figuras 41 a 45 ilustram as séries temporais obtidas para cada valor de β , enquanto a Figura 46 resume, de forma comparativa, o impacto do ruído sobre a qualidade do sinal em cada neurônio da cadeia. A análise a seguir descreve os principais efeitos observados e discute os mecanismos dinâmicos responsáveis pelas mudanças detectadas.

Figura 41 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 1.0$ e $\beta = 0.0$ - 1D



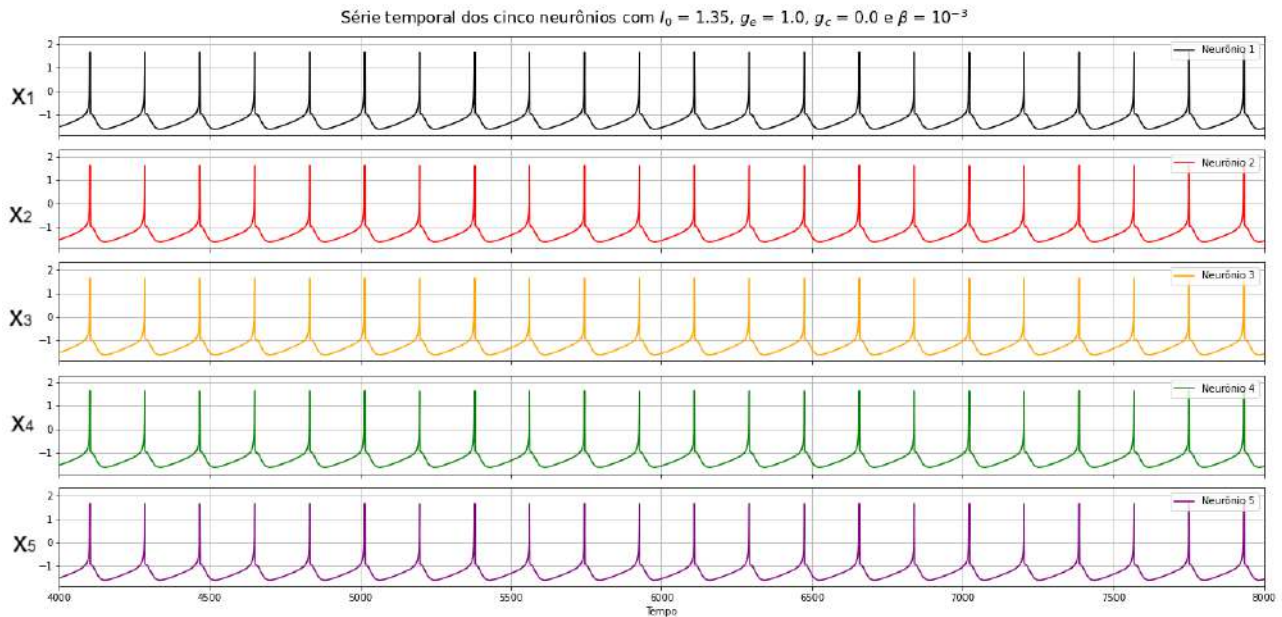
Fonte: elaborado pela própria autora.

Na ausência de ruído ($\beta = 0$), observamos na Figura 41 que todos os neurônios oscilam de forma regular e sincronizada, com bursts periódicos bem definidos e amplitudes estáveis. Essa regularidade é uma consequência do regime determinístico do sistema, sem perturbações.

À medida que a intensidade do ruído aumenta:

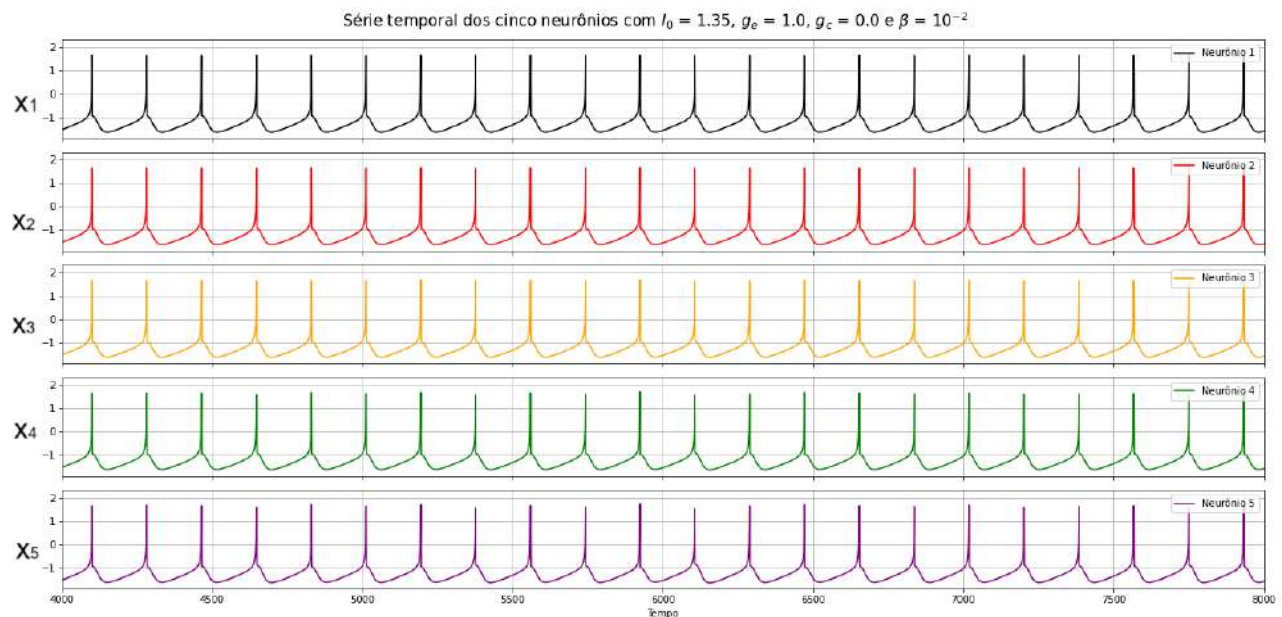
- Para $\beta = 10^{-3}$ (Figura 42) e $\beta = 10^{-2}$ (Figura 43) pequenas flutuações (não óbvias) são

Figura 42 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 1.0$ e $\beta = 10^{-3}$ - 1D



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 43 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 1.0$ e $\beta = 10^{-2}$ - 1D

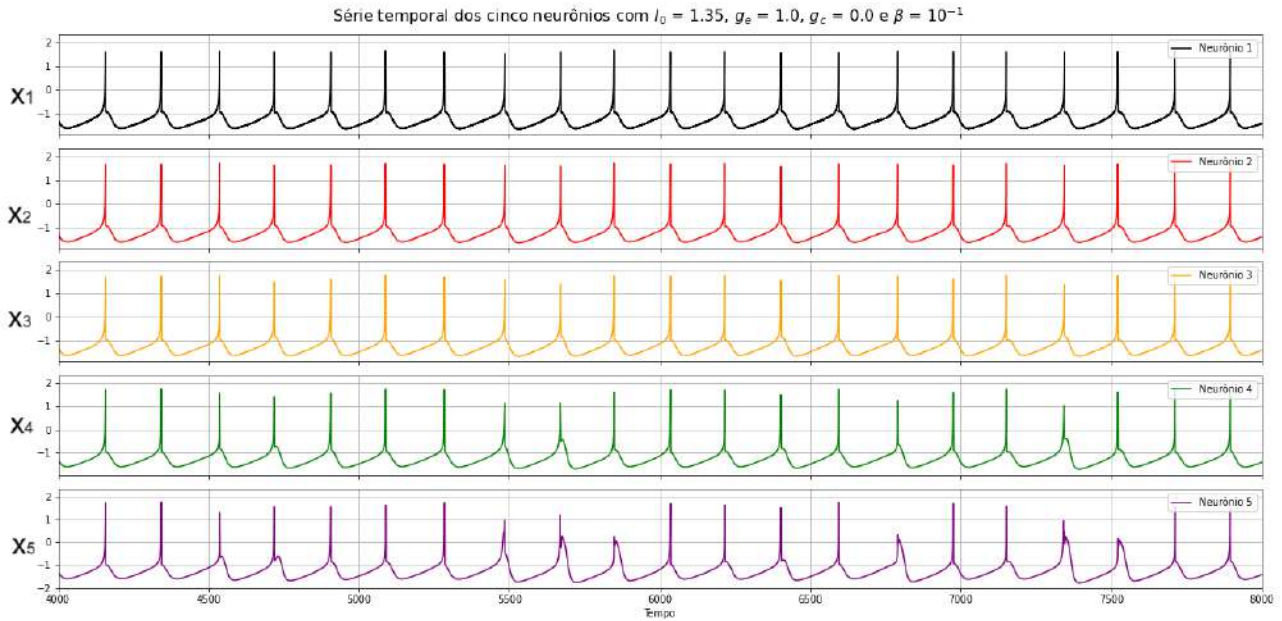


Fonte: elaborado pela própria autora.

observadas apenas no neurônio 1 (que teve ruído adicionado), sem impacto significativo nos demais neurônios da cadeia. Isso indica que o ruído fraco é parcialmente filtrado pela rede.

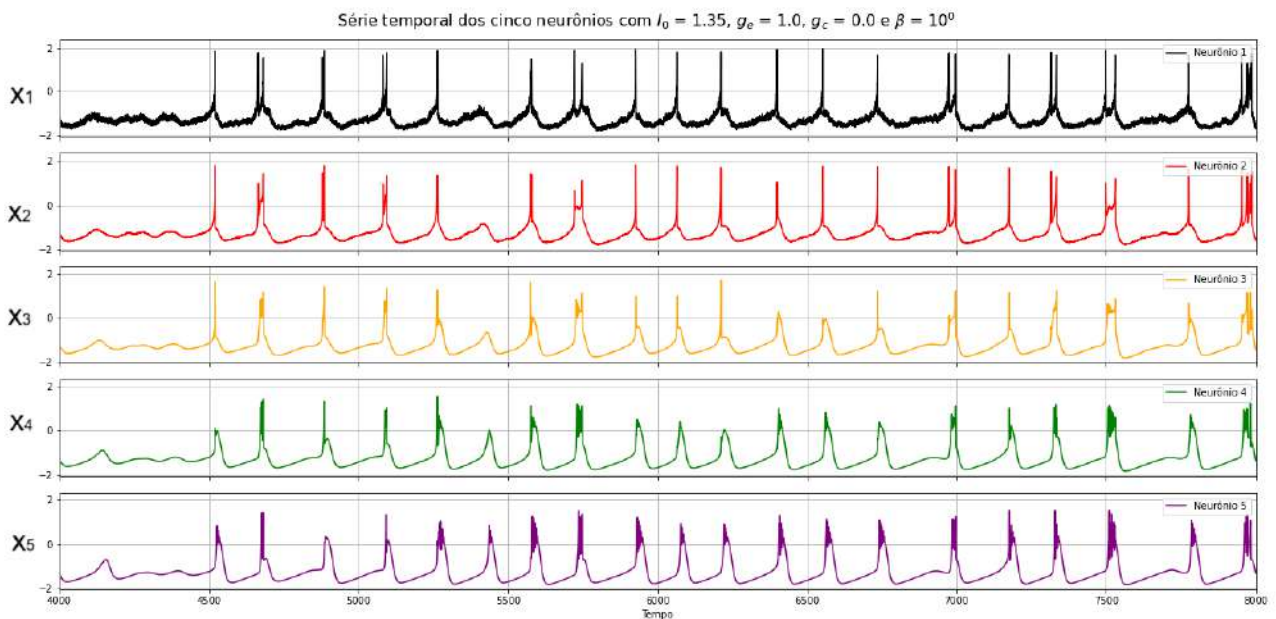
- Em $\beta = 10^{-1}$ (Figura 44) a influência do ruído se propaga para os neurônios seguintes. As séries temporais mostram irregularidades crescentes nos bursts, especialmente nos neurônios 2 e 3. Isso evidencia o início da perda de sincronização.
- Para $\beta = 1.0$, Figura 45, o comportamento do neurônio 1 se torna altamente ruidoso, com os

Figura 44 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 1.0$ e $\beta = 10^{-1}$ - 1D



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 45 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 1.0$ e $\beta = 10^0$ - 1D



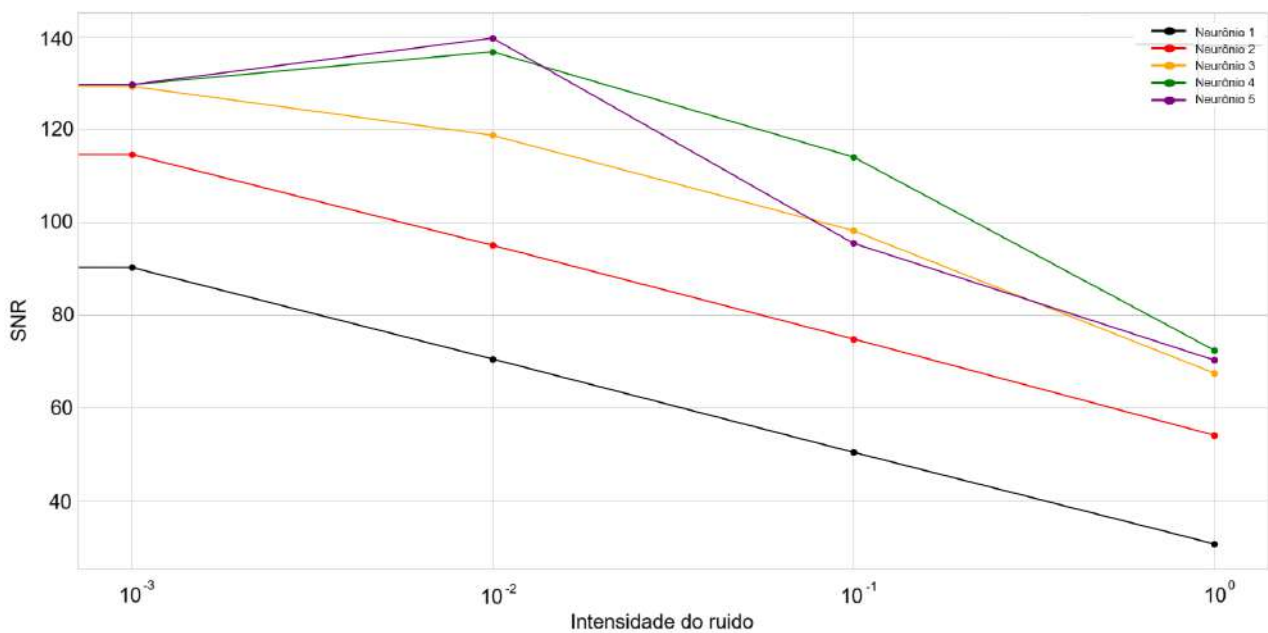
Fonte: elaborado pela própria autora.

bursts apresentando forte deformação. A perturbação se transmite por toda a cadeia, afetando inclusive os neurônios mais distantes (4 e 5), com perda clara de periodicidade e forma.

A Figura 46 mostra o comportamento da SNR em função de β para cada neurônio. É evidente que o ruído introduzido no neurônio 1 causa degradação progressiva da qualidade do sinal em toda a rede, com destaque para os seguintes pontos:

- O neurônio 1 apresenta queda monotônica e acentuada da SNR conforme β aumenta.

Figura 46 – SNR em função do β para cada neurônio com $g_e = 1.0 - 1D$



Fonte: elaborado pela própria autora.

- Os neurônios 2 a 5 apresentam um comportamento dependente da distância ao neurônio excitado. Quanto mais distante, mais atenuado o efeito do ruído para baixos valores de β . No entanto, para $\beta = 1.0$, todos os neurônios sofrem uma queda substancial de SNR.
- Os neurônios 4 e 5, inicialmente os mais imunes, passam a ter SNR comparável aos neurônios próximos ao ruído quando β atinge 1.0. Isso demonstra que a propagação do ruído depende tanto da intensidade quanto da topologia de acoplamento.
- Os valores máximos de SNR (em $\beta = 10^{-2}$) ocorrem para os neurônios 4 e 5, enquanto o neurônio 1 apresenta os menores valores em toda a faixa analisada.

Uma característica que se destaca na Figura 46 é a queda abrupta da SNR do neurônio 5 para os β mais altos, diferindo do comportamento mais suave dos neurônios 2 a 4. Esse fenômeno pode ser explicado por três fatores principais:

- **Perda da filtragem progressiva:** Para baixos valores de β , os neurônios intermediários (2 a 4) atuam como filtros do ruído introduzido no neurônio 1. No entanto, com $\beta = 1.0$, a intensidade do ruído é tão alta que compromete o funcionamento regular desses neurônios, os quais passam a transmitir sinais ruidosos para os subsequentes.
- **Acúmulo não linear de ruído:** A propagação do ruído em redes dinâmicas acopladas não é linear. Pequenos desvios iniciais podem ser amplificados ao longo da cadeia, especialmente

em regimes de alta sensibilidade. Assim, o neurônio 5 recebe uma entrada altamente irregular, resultando em significativa perda de coerência e SNR.

5.2.3 Acoplamento elétrico $g_e = 0.1$

Nesta seção, analisamos o impacto da adição de ruído na corrente de entrada do primeiro neurônio em uma cadeia linear composta por cinco neurônios modelados pelo sistema HR. A topologia adotada é unidimensional e linear, com acoplamento elétrico fraco ($g_e = 0.1$). O ruído é adicionado exclusivamente à corrente I_0 do primeiro neurônio, com intensidade variável dada pelo parâmetro β . *

As séries temporais obtidas para os cinco neurônios ao longo do tempo revelam como a perturbação introduzida no primeiro neurônio se propaga e afeta a dinâmica dos demais elementos da cadeia linear. Na ausência de ruído ($\beta = 0$), Figura 47, todos os neurônios apresentam oscilações regulares e perfeitamente sincronizadas, com padrões praticamente idênticos. Esse comportamento indica que, mesmo em presença de um acoplamento elétrico fraco ($g_e = 0.1$), a rede é capaz de manter coerência entre os elementos, levando em consideração que estão todos com a mesma corrente inicial.

Figura 47 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 0.1$ e $\beta = 0.0$ - 1D



Fonte: elaborado pela própria autora.

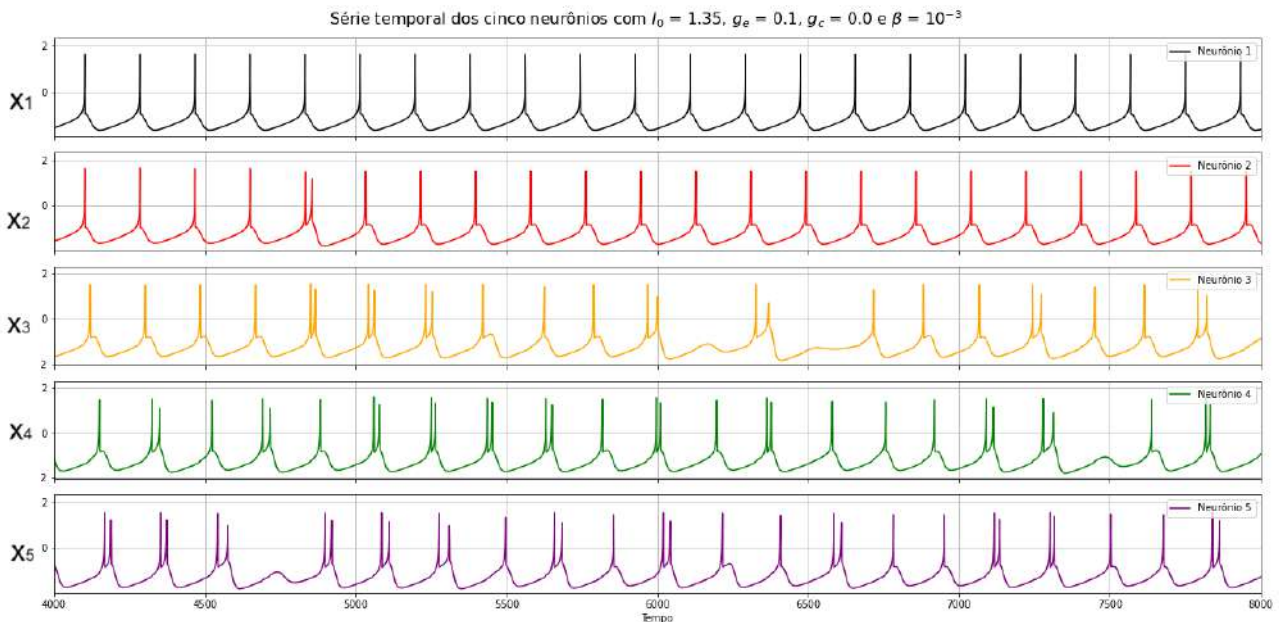
À medida que a intensidade do ruído aumenta, observa-se uma degradação progressiva no padrão oscilatório do primeiro neurônio. Para $\beta = 10^{-3}$ e $\beta = 10^{-2}$, Figuras 48 e 49 respectivamente, as oscilações do neurônio 1 começam a apresentar deformações sutis, que se propagam parcialmente

ao longo da rede, afetando mais significativamente os neurônios 2 e 3, enquanto os neurônios 4 e 5 ainda preservam uma dinâmica relativamente regular.

Além disso, começam a surgir *picos duplos* e *falhas na geração de pulsos*, principalmente nos neurônios intermediários (2 e 3), indicando que o ruído não apenas deforma as oscilações, mas também interfere no mecanismo de disparo. Esses efeitos são mais visíveis para $\beta = 10^{-2}$, Figura 49, onde a irregularidade dos pulsos torna-se mais pronunciada, comprometendo a coerência temporal da cadeia e evidenciando a dissipação incompleta do ruído.

Esse comportamento reforça a ideia de que o ruído, embora injetado apenas no primeiro neurônio, influencia a dinâmica através da rede, com efeitos que decaem com a posição do neurônio, mas que ainda assim perturbam a sincronização entre os elementos, sobretudo nas primeiras posições da cadeia.

Figura 48 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 0.1$ e $\beta = 1.0 \cdot 10^{-3} - 1D$

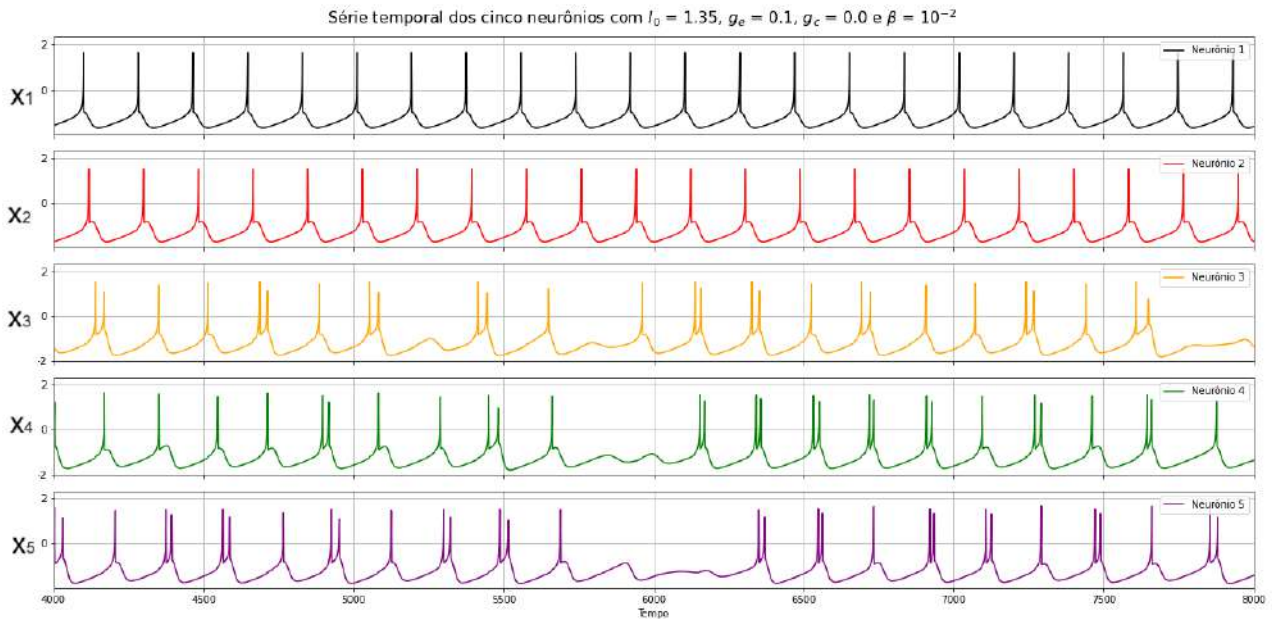


Fonte: elaborado pela própria autora.

Para $\beta = 10^{-1}$, Figura 50, o ruído já é suficientemente intenso para causar distorções marcantes no neurônio 1, que se refletem mais efetivamente nos demais neurônios da cadeia. Os sinais tornam-se visivelmente mais irregulares, com perda da forma de onda típica do modelo HR e uma oscilação menos precisa em termos de amplitude e frequência. O efeito de propagação do ruído é mais evidente nesse caso, com perturbações alcançando até o neurônio 5, embora com menor intensidade.

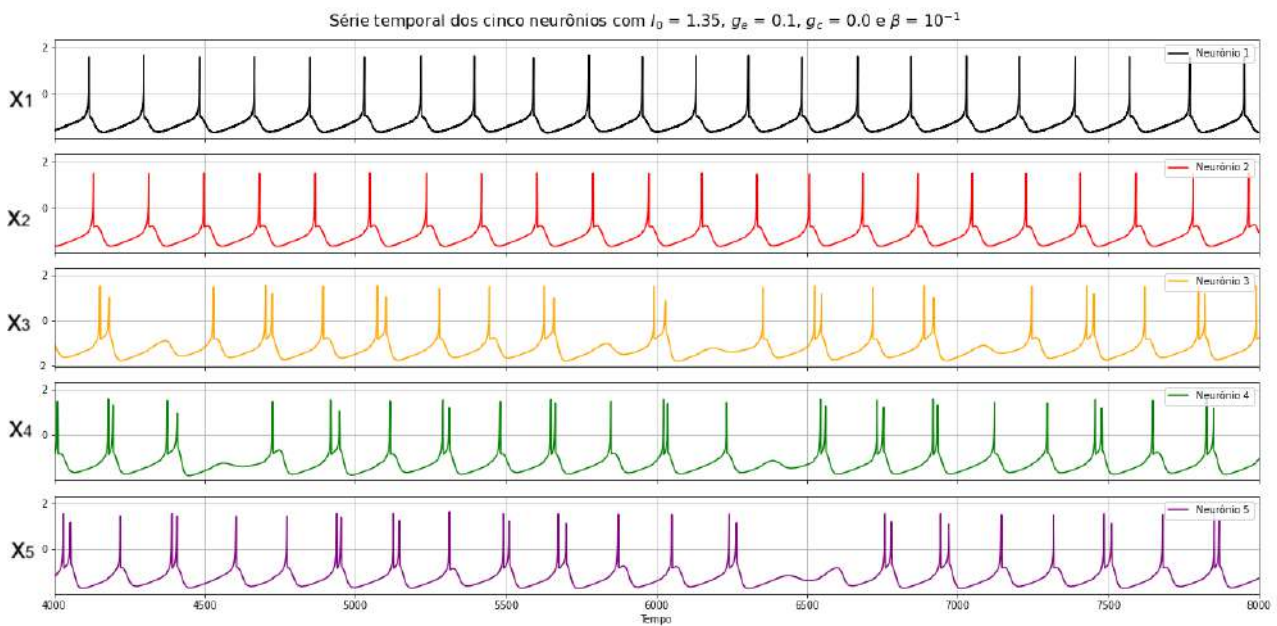
Por fim, para $\beta = 10^0$, Figura 51, o neurônio 1 apresenta um comportamento bastante irregular, com oscilações deformadas e ruído dominante. Curiosamente, os neurônios mais distantes (principalmente os neurônios 4 e 5) demonstram uma recuperação parcial do padrão oscilatório, exibindo sinais mais organizados do que os observados em $\beta = 10^{-1}$. Esse comportamento sugere que o ruído

Figura 49 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 0.1$ e $\beta = 1.0 \cdot 10^{-2}$ - 1D



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 50 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 0.1$ e $\beta = 1.0 \cdot 10^{-1}$ - 1D



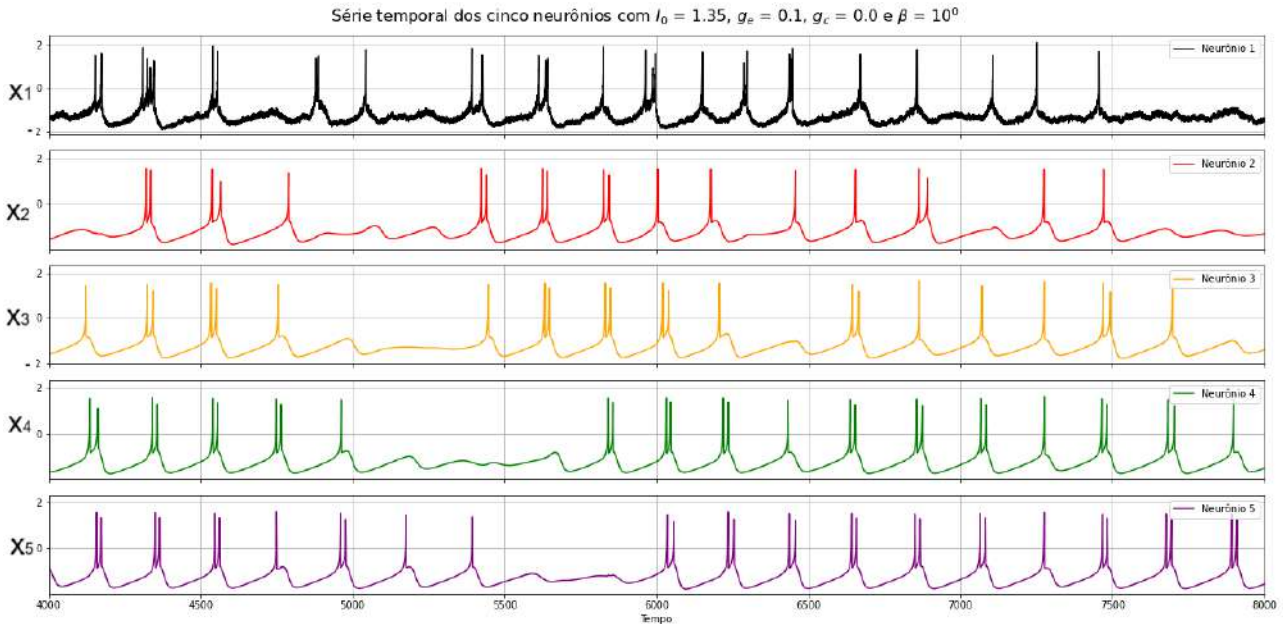
Fonte: elaborado pela própria autora.

de alta intensidade, ao invés de se propagar de forma coerente, introduz perturbações tão rápidas e desorganizadas que acabam perdendo efetividade na transmissão para os demais neurônios.

Além disso, observa-se que o sinal torna-se progressivamente mais "limpo" à medida que se afasta da fonte do ruído, indicando um possível mecanismo de filtragem passiva na rede. Isso sugere que os acoplamentos entre os neurônios atuam como um tipo de filtro natural, dissipando ou suavizando os componentes de alta frequência e preservando apenas oscilações mais coerentes.

Trata-se, portanto, de um indicativo de que ruídos intensos podem quebrar a coerência local, mas não necessariamente comprometem toda a rede, revelando uma robustez dinâmica associada à topologia da cadeia neuronal.

Figura 51 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 0.1$ e $\beta = 10^0 - 1D$



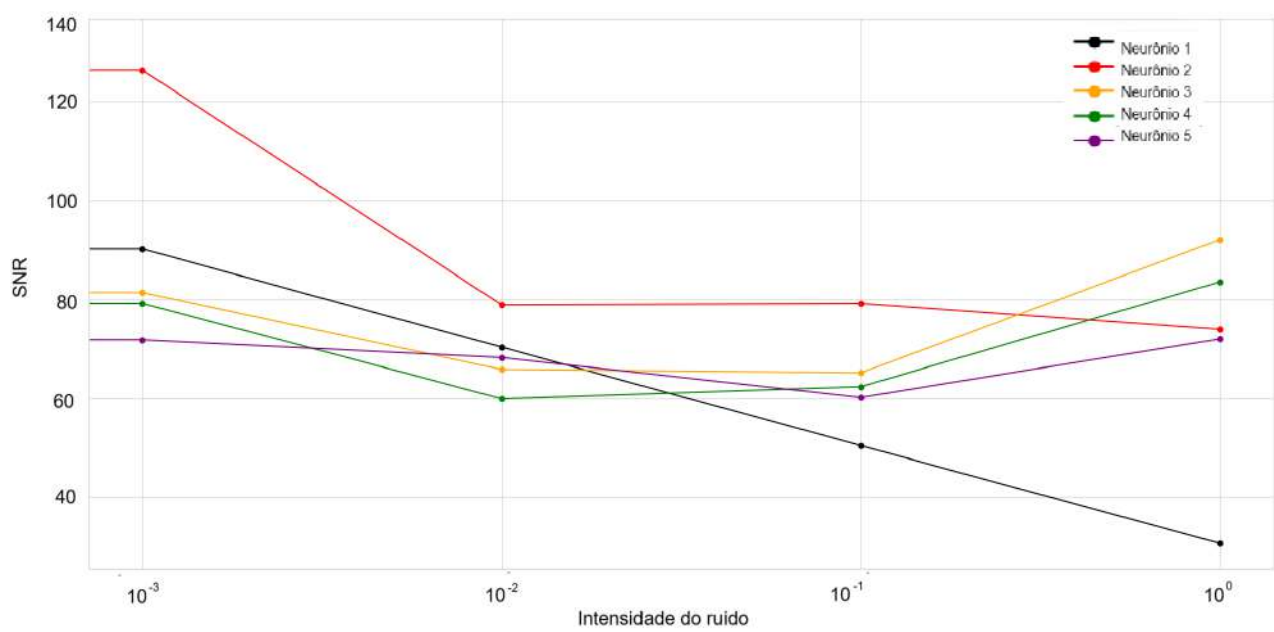
Fonte: elaborado pela própria autora.

Observa-se na Figura 52 que o SNR do neurônio 1 (linha preta) que recebe diretamente o ruído, decresce acentuadamente à medida que β aumenta. Para $\beta = 10^0$, o valor de SNR se torna bastante baixo (< 30), refletindo uma degradação significativa do sinal devido à forte perturbação.

Os demais neurônios (2 a 5) apresentam comportamento distinto. Inicialmente, para $\beta = 10^{-3}$, o SNR é alto e decresce até atingir um mínimo em $\beta = 10^{-1}$. Curiosamente, para $\beta = 10^0$, o SNR volta a crescer, sugerindo que ruídos de alta intensidade que desorganizam a coerência do sinal no neurônio 1 propaga a perturbação para os neurônios subsequentes de forma eficiente. Ou seja, há maior regularidade quando se avança na rede.

Esses resultados quantitativos confirmam todas as observações feitas nas figuras anteriores das séries temporais: o ruído se propaga parcialmente com perda de coerência e, para intensidades mais elevadas, os neurônios distais atuam como filtros naturais, restaurando parcialmente a regularidade oscilatória. Assim, o comportamento do SNR ao longo da cadeia neuronal reforça a presença de um mecanismo de filtragem passiva na dinâmica da rede.

Figura 52 – SNR em função do β para cada neurônio com $g_e = 0.1 - 1D$



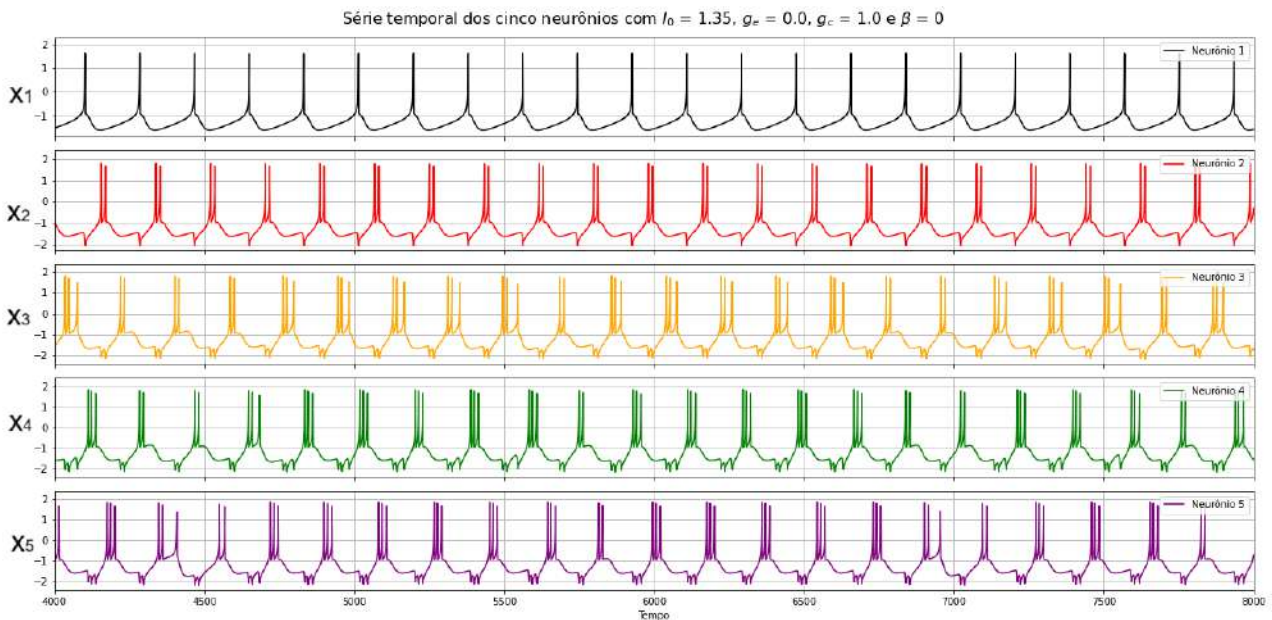
Fonte: elaborado pela própria autora.

5.2.4 Acoplamento químico $g_c = 1.0$

Nesta seção, investigamos o comportamento dinâmico de cinco neurônios modelados pelo sistema de Hindmarsh-Rose (HR) com acoplamento químico, sob diferentes intensidades de ruído aditivo na corrente do primeiro neurônio. Foram considerados os seguintes parâmetros fixos: $I_0 = 1,35$, $g_e = 0$, $g_c = 1,0$, enquanto o parâmetro de ruído β variou entre 0, 10^{-3} , 10^{-2} , 10^{-1} e 10^0 .

Na ausência de ruído ($\beta = 0$), Figura 53, observa-se uma dinâmica fortemente sincronizada entre os cinco neurônios. A série temporal mostra oscilações regulares e praticamente idênticas em termos de forma e frequência, indicando que o acoplamento químico é suficiente para promover a coerência da dinâmica entre os neurônios. No entanto, diferentemente do que se observa no acoplamento elétrico, onde a sincronização ocorre de forma praticamente simultânea, o acoplamento químico apresenta uma defasagem natural entre os neurônios, com a propagação do sinal ocorrendo de forma sequencial ao longo da rede. Assim, mesmo na ausência de ruído, surgem pequenos atrasos entre os picos de disparo, refletindo a assimetria da topologia unidirecional e a natureza do mecanismo químico de acoplamento. O padrão oscilatório é caracterizado por pulsos repetitivos bem definidos, típicos do comportamento do modelo HR em regime de *bursting*.

Figura 53 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 1.0$ e $\beta = 0.0$ - 1D

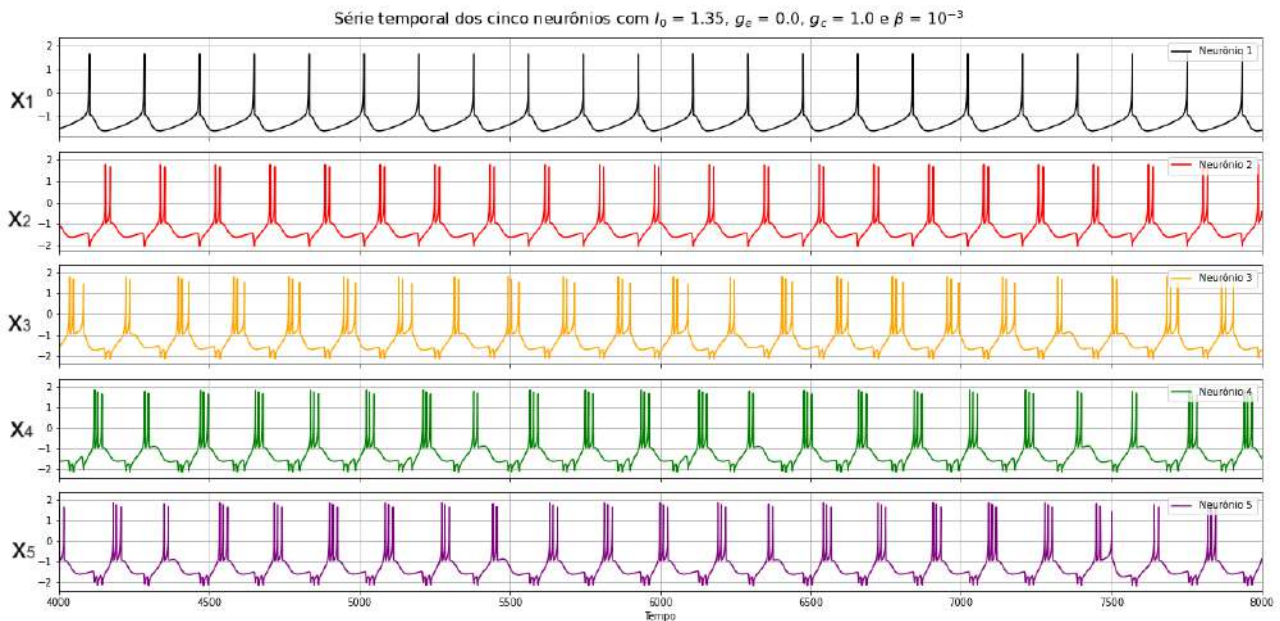


Fonte: elaborado pela própria autora.

Com o aumento gradual do ruído, observa-se que o primeiro neurônio (x_1) é o mais afetado. Para $\beta = 10^{-3}$ e $\beta = 10^{-2}$, Figuras 54 e 55, respectivamente, o sinal de x_1 começa a apresentar pequenas distorções na forma de flutuações de baixa amplitude entre os picos, mas ainda mantém um padrão oscilatório identificável. Os demais neurônios permanecem com sinais praticamente inalterados,

evidenciando que o ruído ainda não se propagou significativamente através da rede.

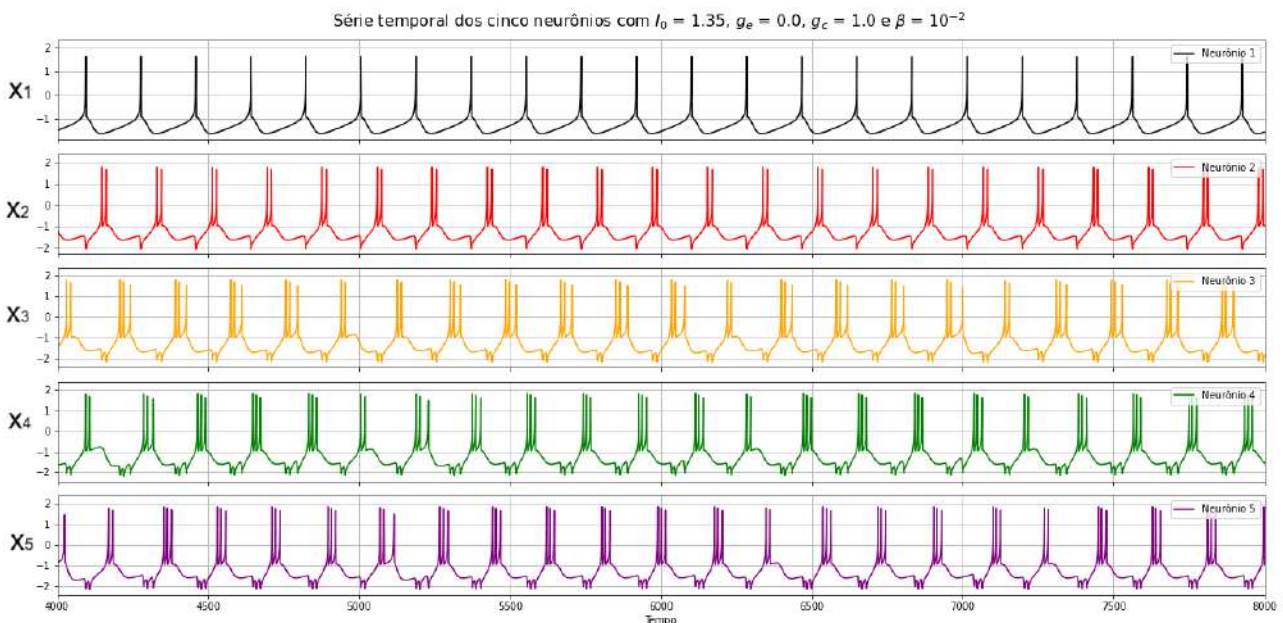
Figura 54 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_c = 1.0$ e $\beta = 1.0 \cdot 10^{-3}$ - 1D



Fonte: elaborado pela própria autora.

Com o aumento de β para 10^{-2} , Figura 55, essas flutuações tornam-se mais perceptíveis no neurônio 1 logicamente, mas o impacto nos demais ainda é limitado. O sistema parece preservar sua coerência. Os demais neurônios ainda conseguem manter a sincronia, refletindo a eficácia do acoplamento químico em isolar o ruído.

Figura 55 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_c = 1.0$ e $\beta = 10^{-2}$ - 1D

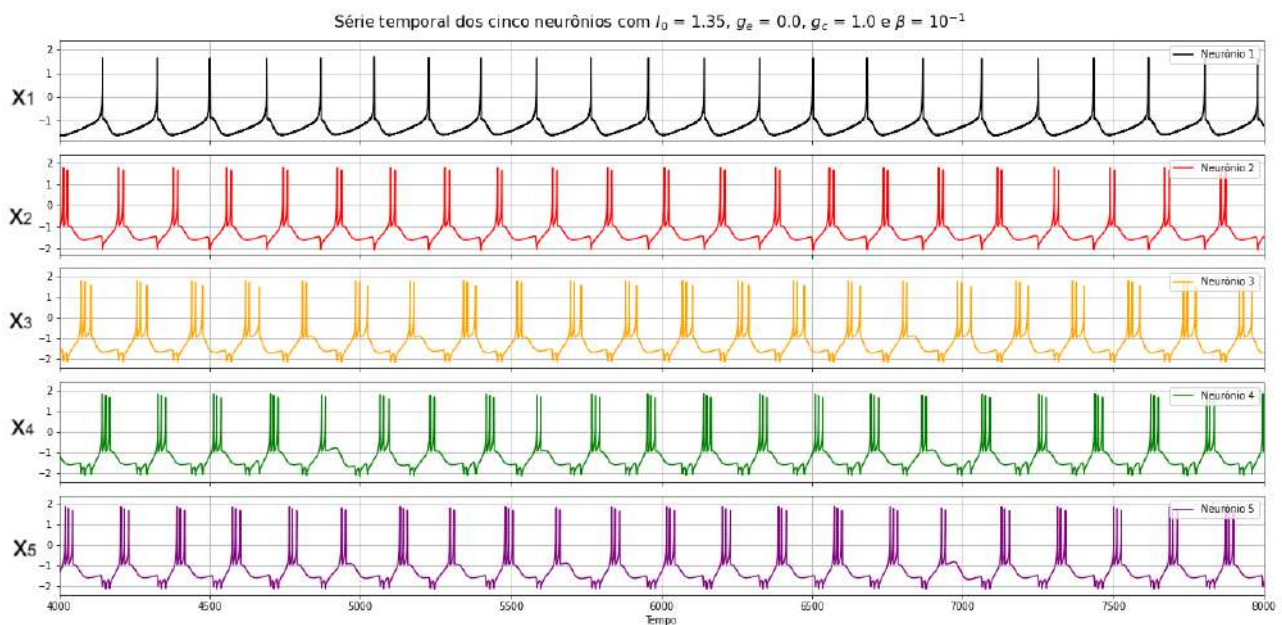


Fonte: elaborado pela própria autora.

Para $\beta = 10^{-1}$, Figura 56 o impacto do ruído já se propaga de maneira mais visível. O neurônio 1 que apresenta variações significativas em seu padrão oscilatório, com distorções nos pulsos e maior irregularidade. Ainda assim, os neurônios restantes exibem um comportamento relativamente estável, com apenas pequenas distorções, mostrando que o acoplamento químico continua promovendo certa robustez, embora com eficiência reduzida.

Observa-se, entretanto, que o neurônio 3 tende a apresentar um padrão de oscilação sistematicamente mais irregular em comparação aos demais, mesmo em níveis moderados de ruído. Essa assimetria na propagação do ruído pode estar associada à posição intermediária na topologia unidirecional, onde o acoplamento já transmite parte da perturbação, mas ainda não foi suficientemente dissipado pelos neurônios subsequentes.

Figura 56 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 0.0$, $g_c = 1.0$ e $\beta = 10^{-1}$ - 1D



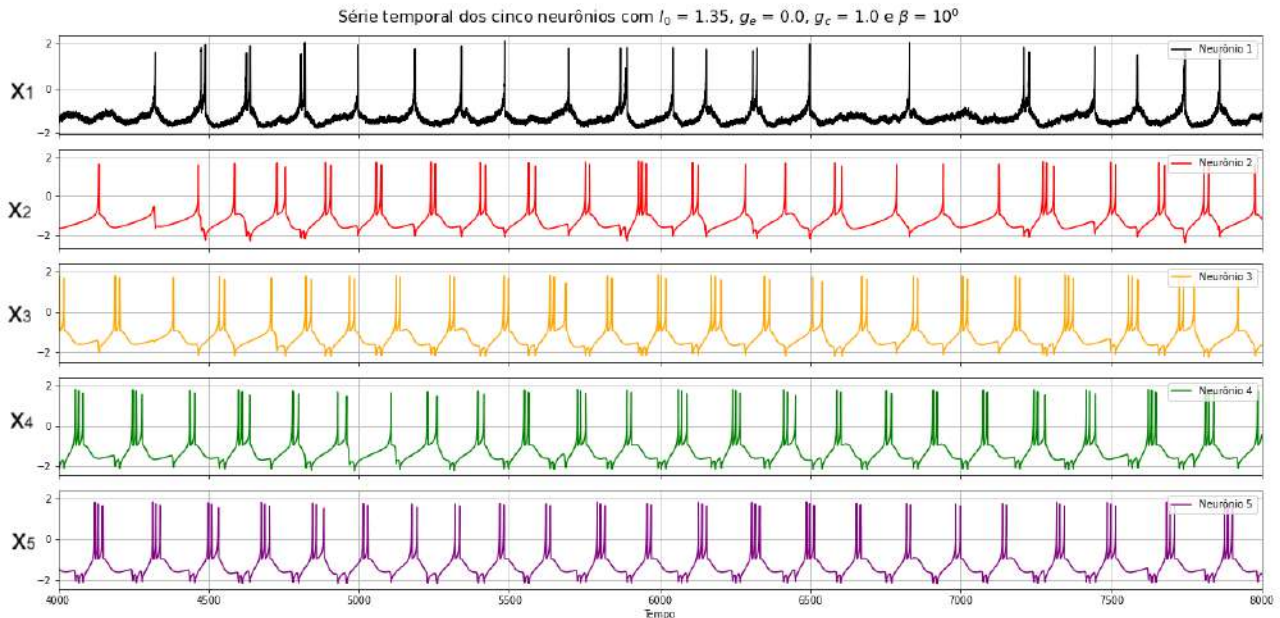
Fonte: elaborado pela própria autora.

No caso de ruído mais intenso ($\beta = 10^0$), como mostrado na Figura 57, o neurônio 1 apresenta uma forte degradação de seu padrão oscilatório, comportamento típico em modelos dinâmicos sensíveis à perturbação externa, Medvedev (2009); essa instabilidade começa a afetar parcialmente os demais neurônios, principalmente os mais próximos do neurônio ruidoso na topologia de acoplamento. Ainda assim, observa-se que os neurônios 2 a 5 mantêm um certo grau de oscilação rítmica, indicando que o acoplamento químico atenua a propagação do ruído, embora não consiga eliminá-lo completamente.

Além disso, percebe-se que as séries temporais dos neurônios subsequentes apresentam um atraso sistemático em relação ao neurônio anterior, coerente com a natureza unidirecional do acoplamento químico. Apesar dessa defasagem temporal, o efeito de filtragem do ruído se assemelha ao observado

no caso de acoplamento elétrico: as flutuações mais intensas tendem a ser parcialmente suprimidas à medida que se propagam, promovendo uma atenuação progressiva da influência do ruído ao longo da rede.

Figura 57 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 0.0$, $g_c = 1.0$ e $\beta = 10^0 - 1D$



Fonte: elaborado pela própria autora.

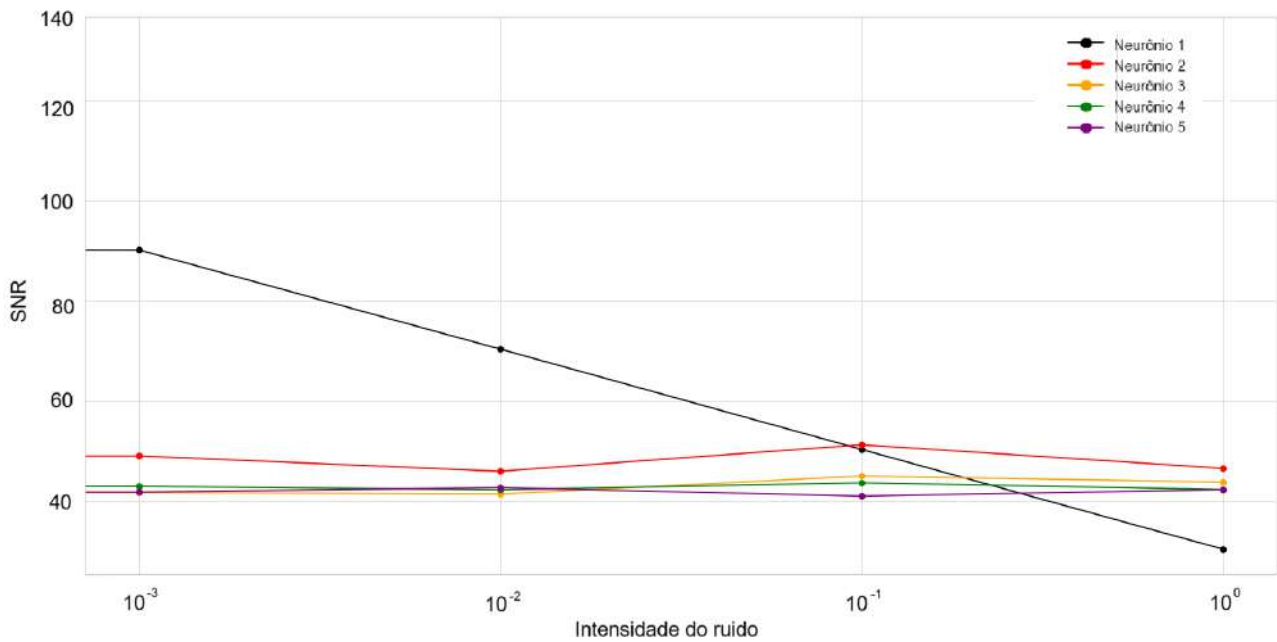
Para quantificar essa degradação nas séries temporais, foi calculada a razão sinal-ruído (SNR) para cada neurônio e para cada valor de β . O gráfico da Figura 58 revela uma tendência clara de redução do SNR no neurônio 1 com o aumento da intensidade do ruído, com queda acentuada e quase linear. Isso confirma a sensibilidade direta do neurônio ruidoso à perturbação aditiva. Por outro lado, os neurônios 2 a 5 apresentam valores de SNR relativamente constantes em todas as intensidades de ruído analisadas, com variações muito pequenas. Isso reforça a hipótese de que o acoplamento químico funciona como um filtro passivo do ruído, conforme descrito em Zhou, Kurths e Hu (2001), Korn e Faure (2003), promovendo atenuação da perturbação mesmo sob acoplamento unidirecional.

Em particular, observa-se que, mesmo com $\beta = 10^0$, os neurônios 2 a 5 mantêm um SNR entre 40 e 50, enquanto o neurônio 1 apresenta uma queda significativa, chegando a valores inferiores a 30. Essa diferença acentuada evidencia a direção do acoplamento e a assimetria na propagação do ruído, confirmando que o primeiro neurônio atua como fonte de perturbação, enquanto os demais reagem passivamente, com amortecimento proporcionado pelo acoplamento sináptico químico.

Os comentários feitos anteriormente com base nas séries temporais — como a preservação das oscilações regulares nos neurônios posteriores, a presença de atrasos sistemáticos e a maior irregularidade concentrada no neurônio 1 — são confirmados pela análise quantitativa via SNR. O

comportamento observado é bastante regular ao longo da cadeia neuronal para todos os valores de β , o que corrobora a existência de um efeito de filtro eficiente. A perturbação introduzida pelo ruído se propaga com atenuação aparente, reforçando o papel do acoplamento químico como um mecanismo de contenção e dissipação de flutuações na dinâmica de redes neurais, Torrealdea, Sancho e Graña (2006).

Figura 58 – SNR em função do β para cada neurônio com $g_c = 1.0 - 1D$



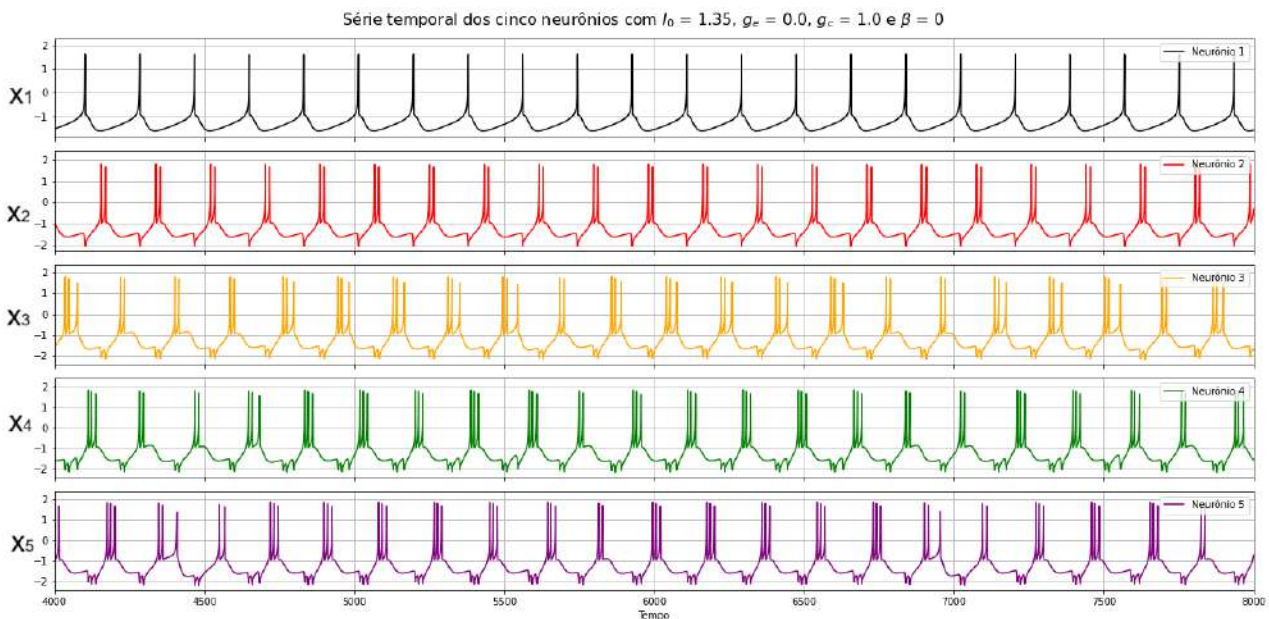
Fonte: elaborado pela própria autora.

5.2.5 Acoplamento químico $g_c = 0.1$

Nesta seção, são analisadas as séries temporais dos cinco neurônios com acoplamento químico $g_c = 0,1$ e diferentes intensidades de ruído β . O ruído é introduzido apenas no primeiro neurônio da rede, e sua propagação ao longo da topologia unidirecional é observada nos demais neurônios.

Para $\beta = 0$, Figura 59, todos os neurônios apresentam oscilações regulares, com picos bem definidos e frequências compatíveis entre si. A ausência de ruído garante alta sincronização e estabilidade no padrão de disparos. Os sinais mantêm simetria e amplitude constantes ao longo do tempo.

Figura 59 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 0.0$, $g_c = 1.0$ e $\beta = 0.0$ - 1D



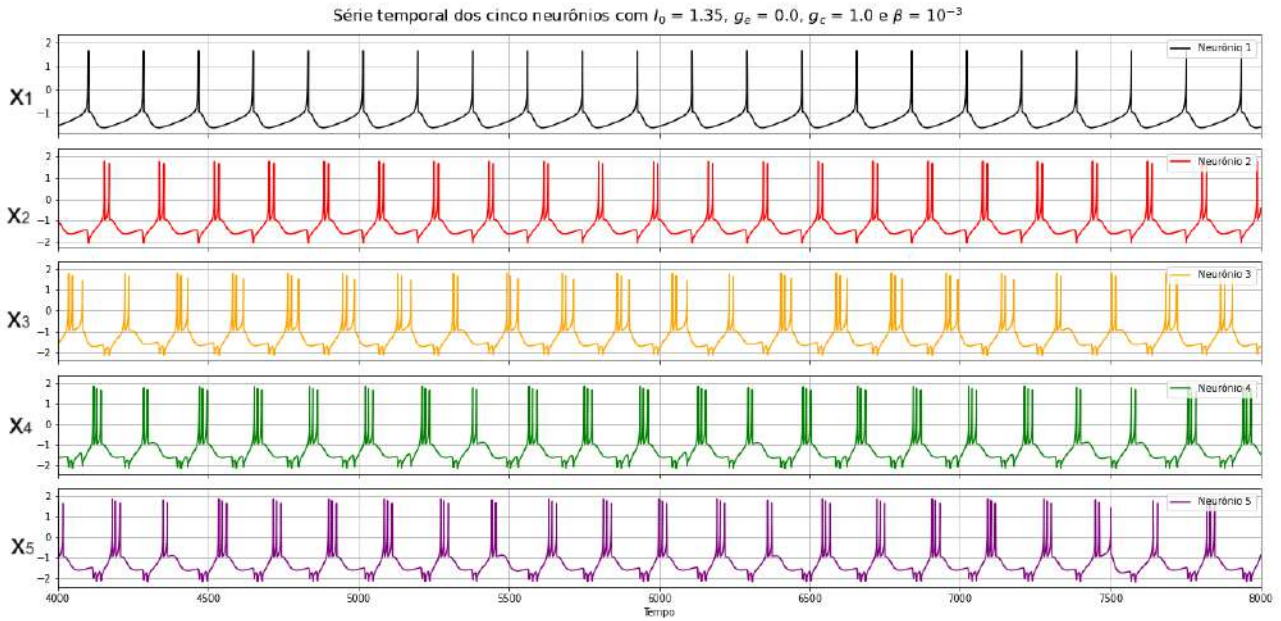
Fonte: elaborado pela própria autora.

Para $\beta = 10^{-3}$ e $\beta = 10^{-2}$, Figuras 60 e 61, respectivamente, observa-se que os neurônios x_2 a x_5 mantêm padrões de disparo regulares e bem definidos, mesmo com a introdução de ruído no neurônio x_1 . A estrutura sequencial da rede impede, nesse regime de baixa intensidade de ruído, a propagação significativa de perturbações, preservando a estabilidade dos sinais nos neurônios subsequentes.

Com o aumento do ruído para $\beta = 10^{-1}$, Figura 62, começam a surgir pequenas irregularidades no sinal de x_2 , refletindo os primeiros indícios de propagação do ruído pela rede. Apesar disso, os neurônios x_3 , x_4 e x_5 ainda exibem oscilações regulares, indicando que a influência do ruído permanece fortemente atenuada ao longo da topologia unidirecional com acoplamento químico fraco.

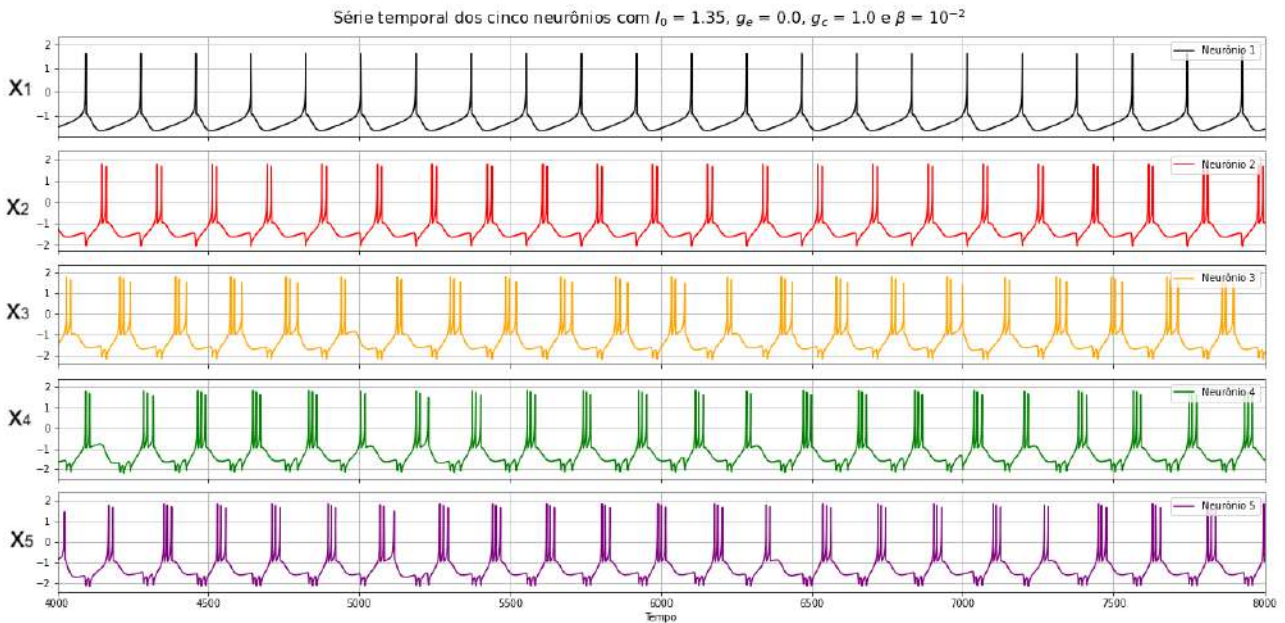
Para $\beta = 1$, Figura 63, as perturbações se tornam mais pronunciadas também em x_2 , com

Figura 60 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_c = 1.0$ e $\beta = 1.0 \cdot 10^{-3} - 1D$



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 61 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_c = 1.0$ e $\beta = 10^{-2} - 1D$

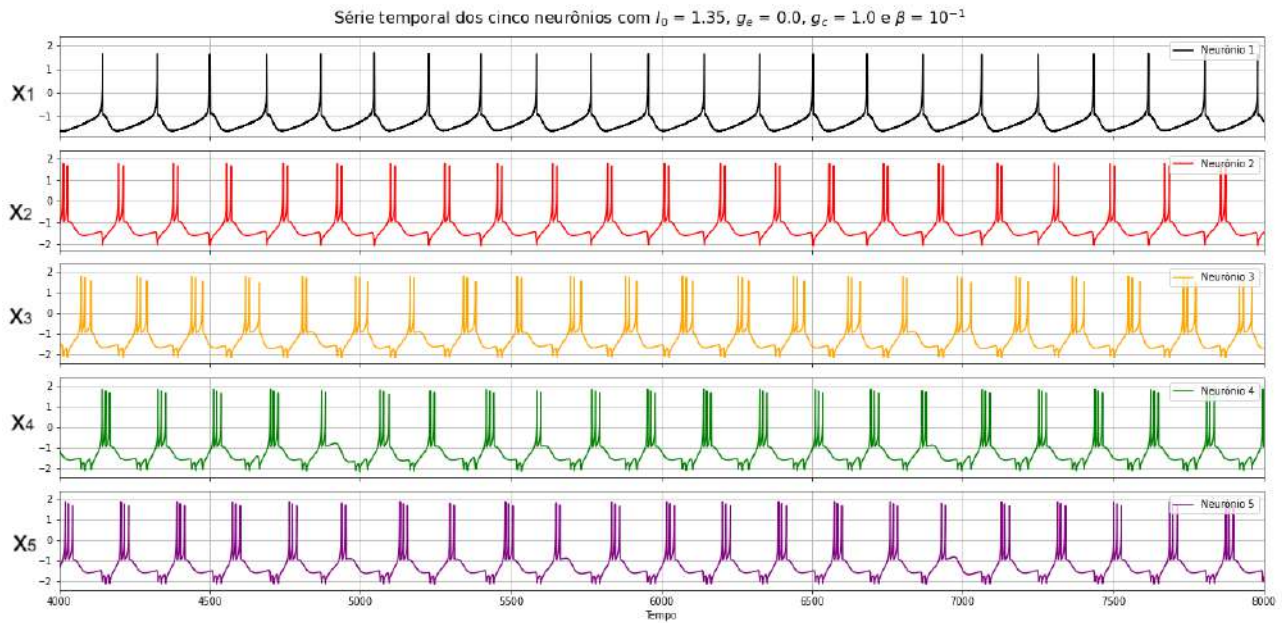


Fonte: elaborado pela própria autora.

comprometimento visível na forma e regularidade dos disparos. Ainda assim, os neurônios x_3 , x_4 e x_5 continuam apresentando sinais majoritariamente estáveis, o que evidencia o papel do acoplamento químico como mecanismo de filtragem parcial da influência do ruído injetado no início da cadeia.

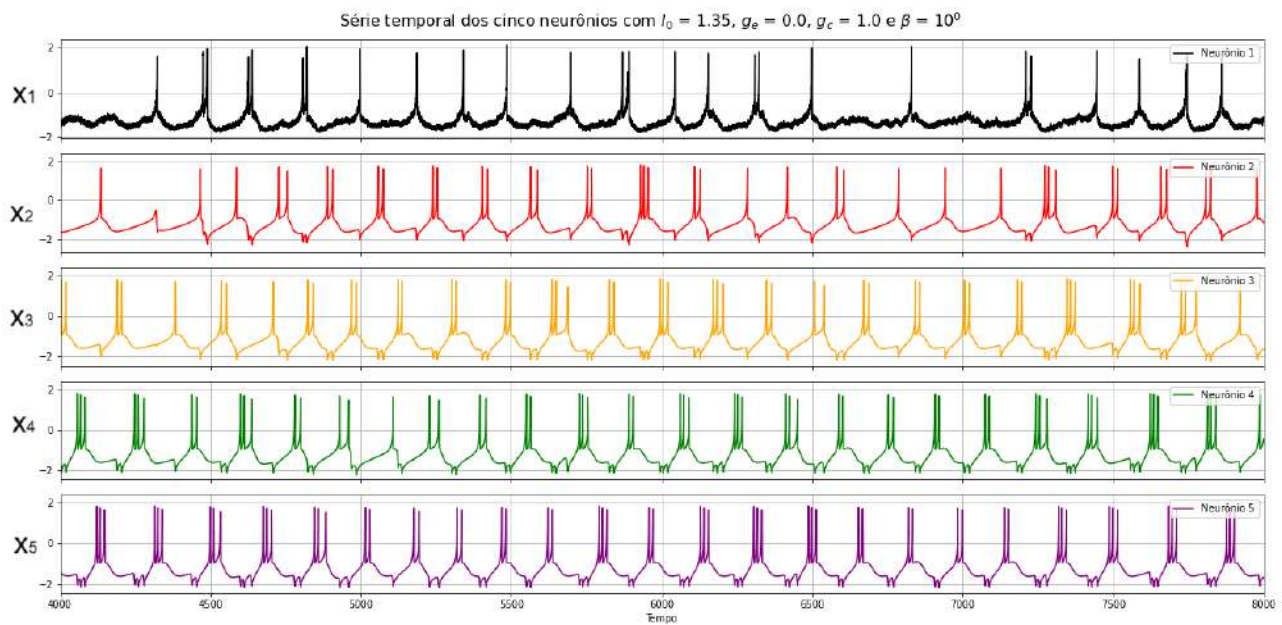
Essa análise é corroborada pela Figura 64, que apresenta a razão sinal-ruído (SNR) para cada neurônio em função do parâmetro β . Observa-se que, apesar da queda acentuada no SNR do neurônio x_1 , os neurônios x_2 a x_5 mantêm valores elevados e relativamente estáveis ao longo de toda

Figura 62 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_c = 1.0$ e $\beta = 10^{-1}$ - 1D



Fonte: elaborado pela própria autora.

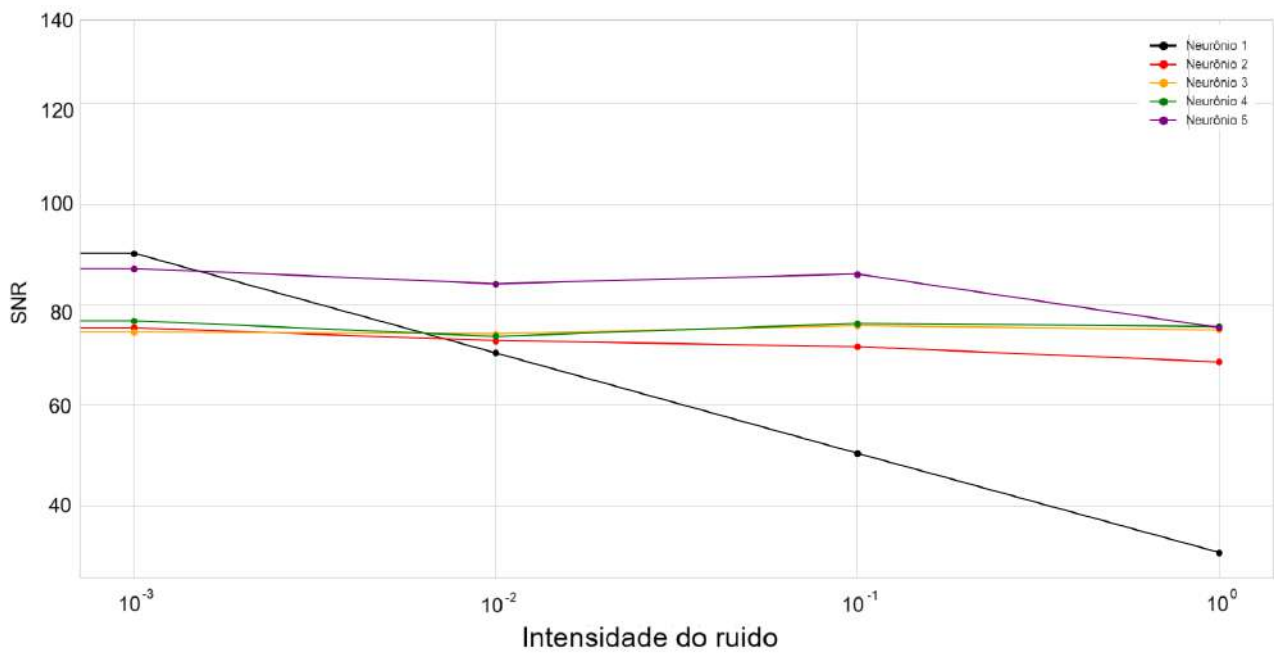
Figura 63 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_c = 1.0$ e $\beta = 10^0$ - 1D



Fonte: elaborado pela própria autora.

a variação de ruído analisada. Esses resultados reforçam a evidência de que o acoplamento químico unidirecional atua como uma barreira parcial à propagação do ruído, preservando a integridade dinâmica dos neurônios mais distantes da fonte de perturbação.

Figura 64 – SNR em função do β para cada neurônio com $g_c = 1.0$ - 1D

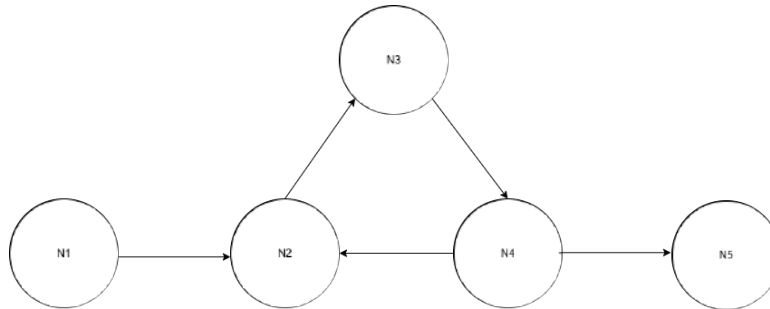


Fonte: elaborado pela própria autora.

5.3 TOPOLOGIA BIDIMENSIONAL COM CINCO NEURÔNIOS

Utilizando a topologia da Figura 65, contendo um loop entre os neurônios 2-3-4, foi adicionado ruído na corrente do primeiro neurônio, variando a sua intensidade e também o valor do acoplamento entre os neurônios da cadeia.

Figura 65 – Topologia bidimensional com cinco neurônios na cadeia.



Fonte: elaborado pela própria autora.

5.3.1 Acoplamento elétrico $g_e = 1.0$

Nesta subseção, examinamos os efeitos da intensidade de ruído em uma rede bidimensional de cinco neurônios com acoplamento elétrico forte, fixado em $g_e = 1,0$. O objetivo é explorar como a dinâmica coletiva do sistema responde à introdução de perturbações externas crescentes, controladas pelo parâmetro β , mantendo-se a corrente de entrada constante em $I_0 = 1,35$.

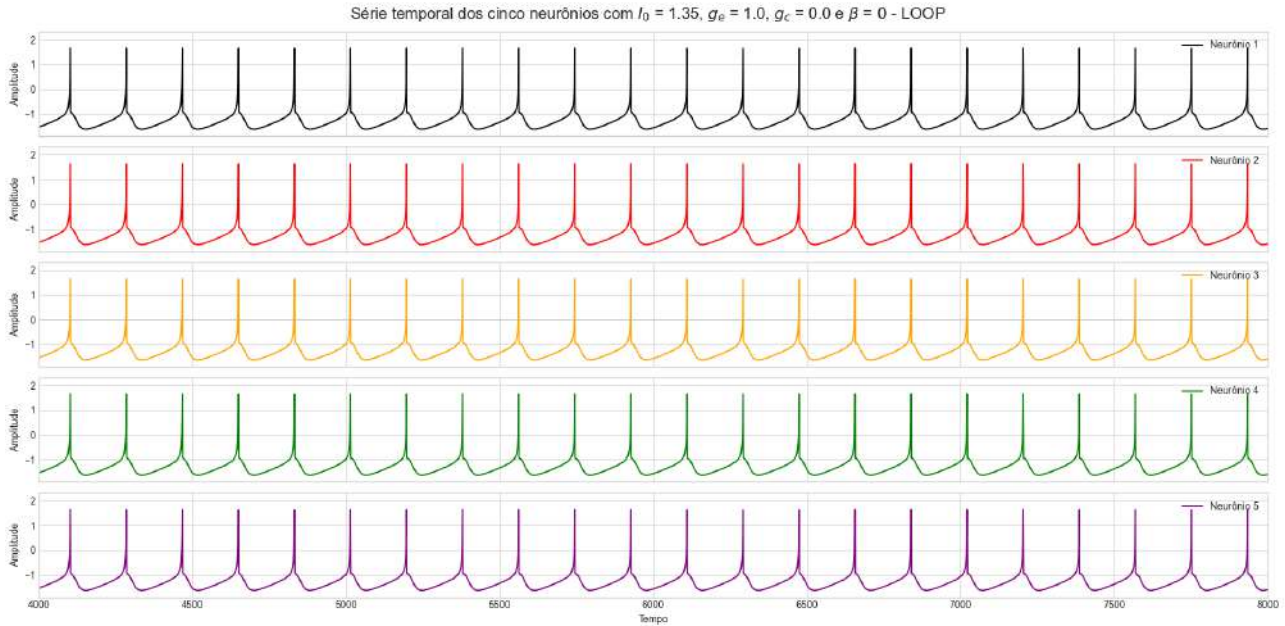
Diferentemente do caso de acoplamento mais fraco, onde o ruído desempenha principalmente um papel de suavização, aqui buscamos identificar se níveis mais elevados de interação sináptica favorecem a persistência da coerência ou amplificam a instabilidade provocada por ruído. Para isso, são analisadas as séries temporais dos neurônios e a razão sinal-ruído (SNR), permitindo observar transições de regimes ordenados para desordenados, e quantificar os efeitos de dessincronização.

Os resultados apresentados a seguir ilustram uma sequência de transições dinâmicas, com perda progressiva de regularidade e coerência de fase, destacando o papel crítico do ruído na estabilidade de sistemas neurais fortemente acoplados.

Observa-se uma transição clara no comportamento das séries conforme o valor de β aumenta, refletindo mudanças progressivas na regularidade, amplitude e sincronização das curvas.

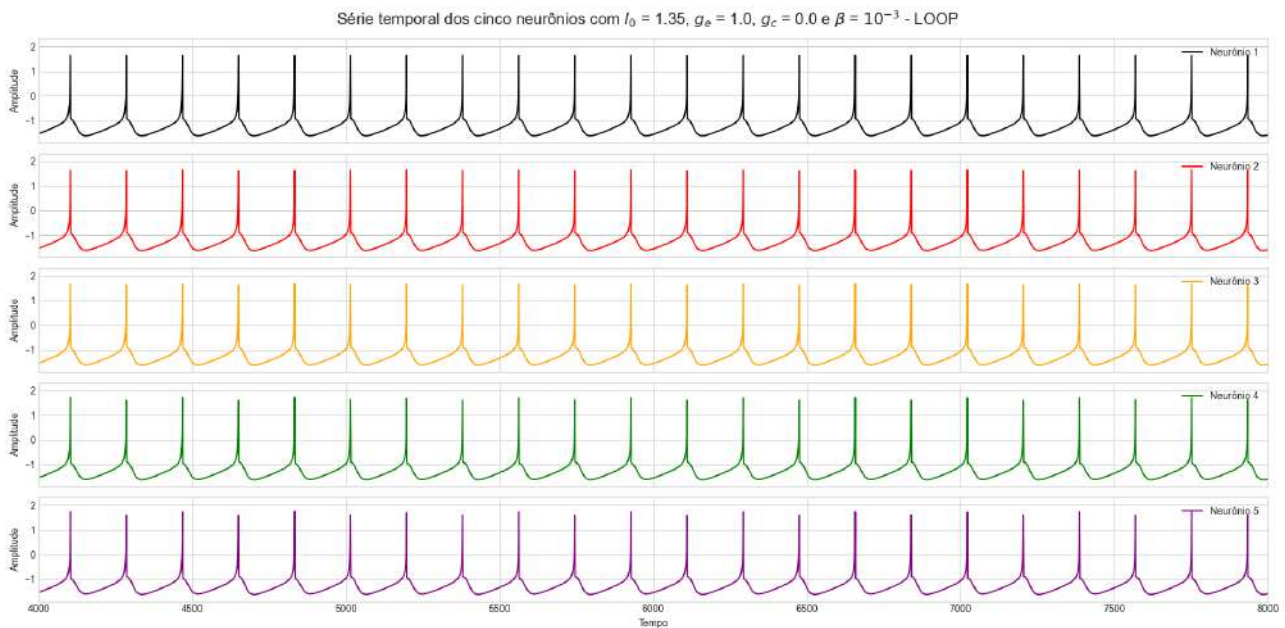
No caso de $\beta = 0,0$, Figura 66, o sistema exibe um comportamento puramente oscilatório, com curvas periódicas, de amplitude constante e fase sincronizada. Esse padrão reflete a ausência de perturbação externa. À medida que o valor de β aumenta, pequenas variações na amplitude começam a surgir, embora o comportamento ainda se mantenha amplamente regular.

Figura 66 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 1.0$ e $\beta = 0.0$ - 2D



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 67 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 1.0$ e $\beta = 10^{-3}$ - 2D

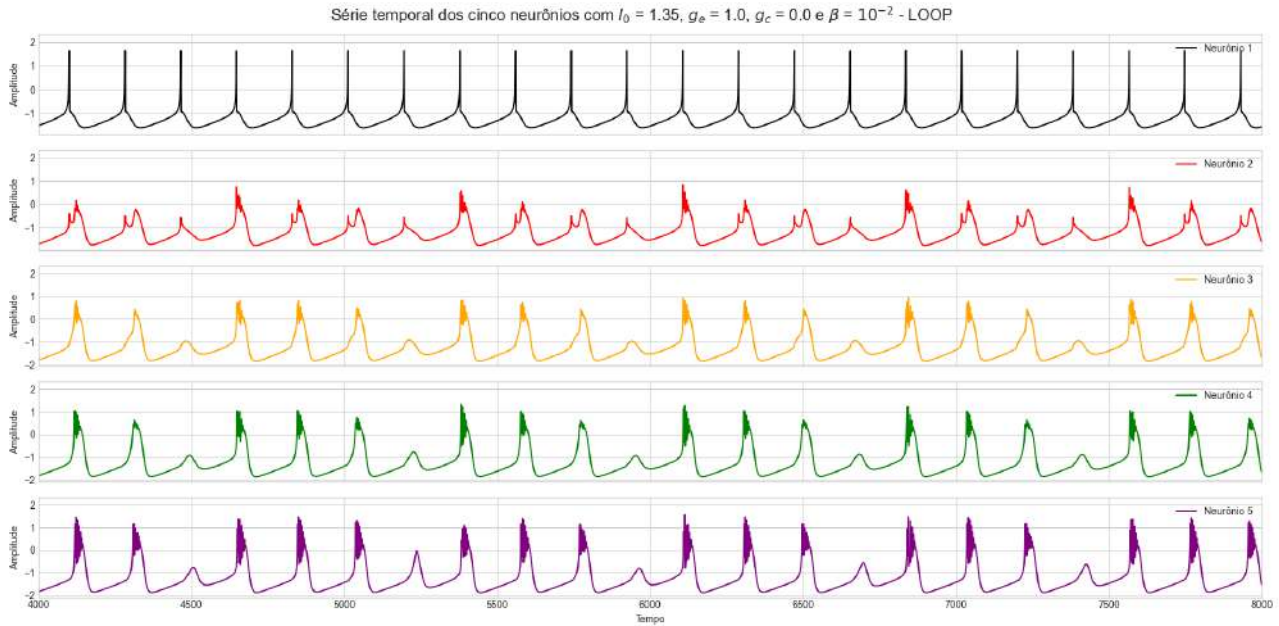


Fonte: elaborado pela própria autora.

Para $\beta = 10^{-2}$, Figura 68, as perturbações se tornam mais evidentes: observa-se modulação de amplitude e deslocamentos de fase entre algumas curvas. Com $\beta = 10^{-1}$, Figura 69 essas irregularidades tornam-se mais pronunciadas. Há perda de sincronização, com curvas apresentando fases distintas e flutuações significativas na amplitude.

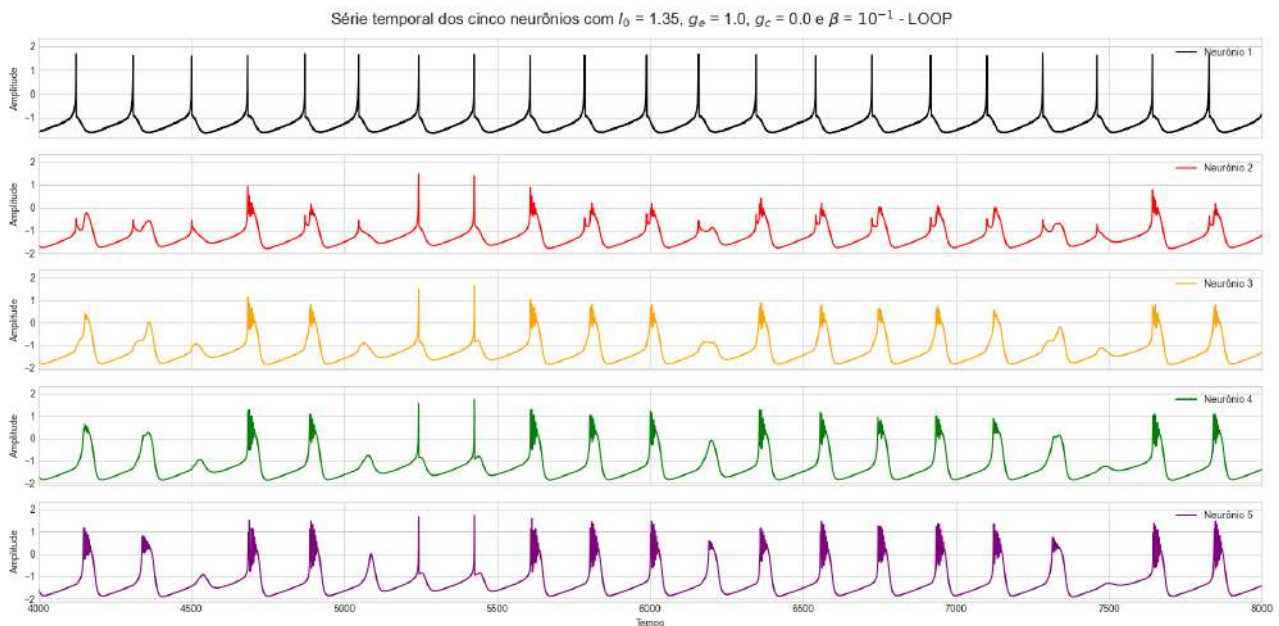
Por fim, para $\beta = 1.0$, Figura 70, o comportamento do sistema torna-se amplamente desordenado. As séries perdem completamente a regularidade, com oscilações altamente irregulares, ampli-

Figura 68 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 1.0$ e $\beta = 10^{-2}$ - 2D



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 69 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 1.0$ e $\beta = 10^{-1}$ - 2D

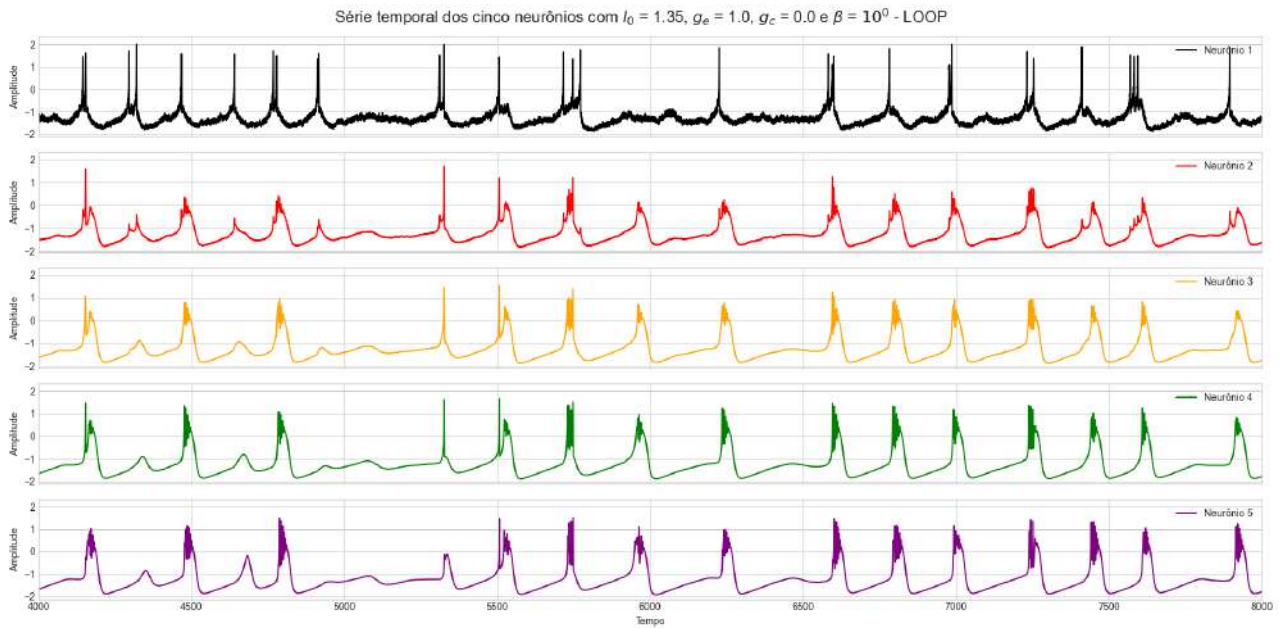


Fonte: elaborado pela própria autora.

tudes flutuantes e ausência de coerência de fase entre os sinais. Essa configuração indica um regime dominado por interações complexas, onde o acoplamento ou ruído é suficientemente intenso para destruir qualquer periodicidade remanescente.

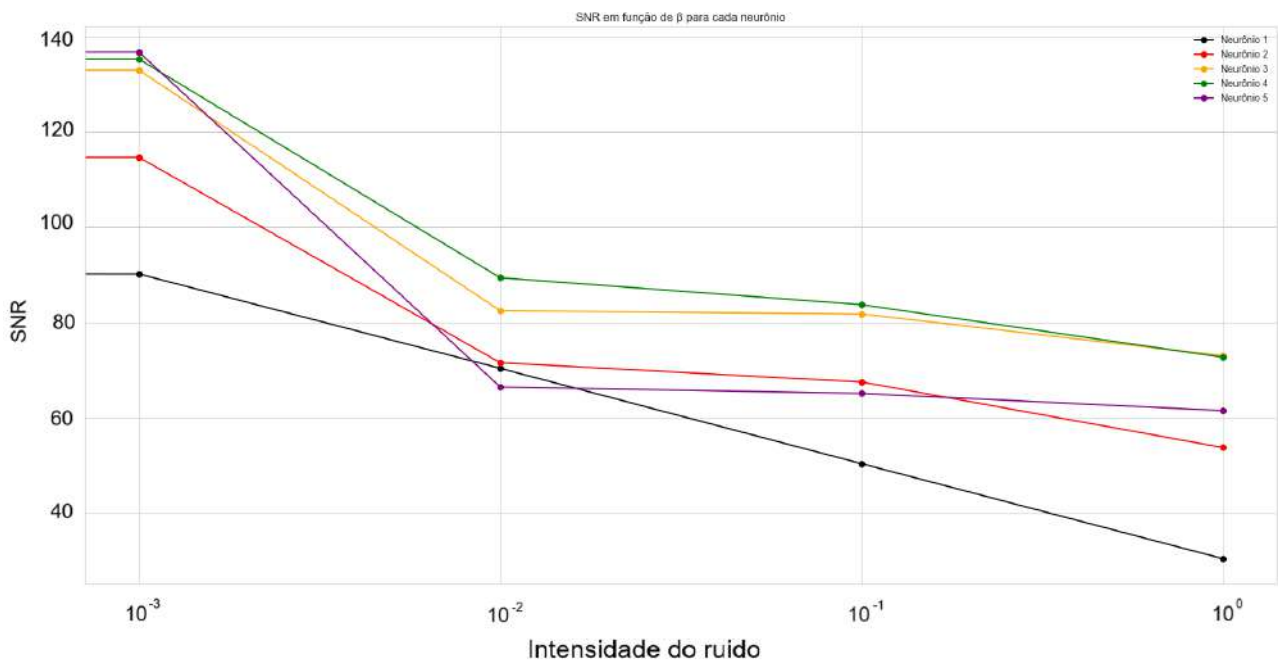
Além disso, a variação visual das amplitudes pode ser quantificada de forma aproximada. Enquanto para $\beta = 0.0$ a amplitude se mantém constante, para $\beta = 1.0$ observa-se uma flutuação superior a 50%. A coerência de fase, por sua vez, decai de forma contínua com o aumento de β ,

Figura 70 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 1.0$ e $\beta = 10^0 - 2D$



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 71 – SNR em função do β para cada neurônio com $g_e = 1.0 - 2D$



Fonte: elaborado pela própria autora.

indicando um processo de dessincronização progressiva.

O padrão de transição de comportamento observado é característico de sistemas não lineares sujeitos a variações em parâmetros de acoplamento ou ruído. A literatura descreve amplamente como pequenas perturbações podem induzir o sistema a bifurcações sucessivas, culminando em regimes caóticos, Nonlinear... (), Pecora e Carroll (1990). Neste contexto, o parâmetro β pode atuar como um controlador da complexidade, regulando o grau de interação entre os elementos do sistema e

promovendo a transição de regimes ordenados para desordenados.

É importante destacar que, com acoplamento elétrico forte ($g_e = 1.0$), o sistema inicialmente apresenta uma forte coerência oscilatória, mas essa estrutura se degrada rapidamente com o aumento de β , especialmente em $\beta = 10^{-1}$ e $\beta = 1.0$. A perda de sincronização e a amplificação das irregularidades indicam que o ruído, nesse regime, atua de forma desestabilizadora. Curiosamente, em níveis muito altos de ruído, observa-se uma leve recuperação de padrão, com uma espécie de reorganização parcial das oscilações, embora sem retorno à coerência inicial. Esse comportamento sugere que, em redes fortemente acopladas, o ruído intenso pode provocar não apenas desordem, mas também reorganizações transitórias na dinâmica coletiva. Então, para o acoplamento elétrico e com níveis de ruído altos o sistema (a cadeia de neurônios) é menos perturbada e o último neurônio oscila de forma muito próxima da situação sem ruído ($\beta = 0$)

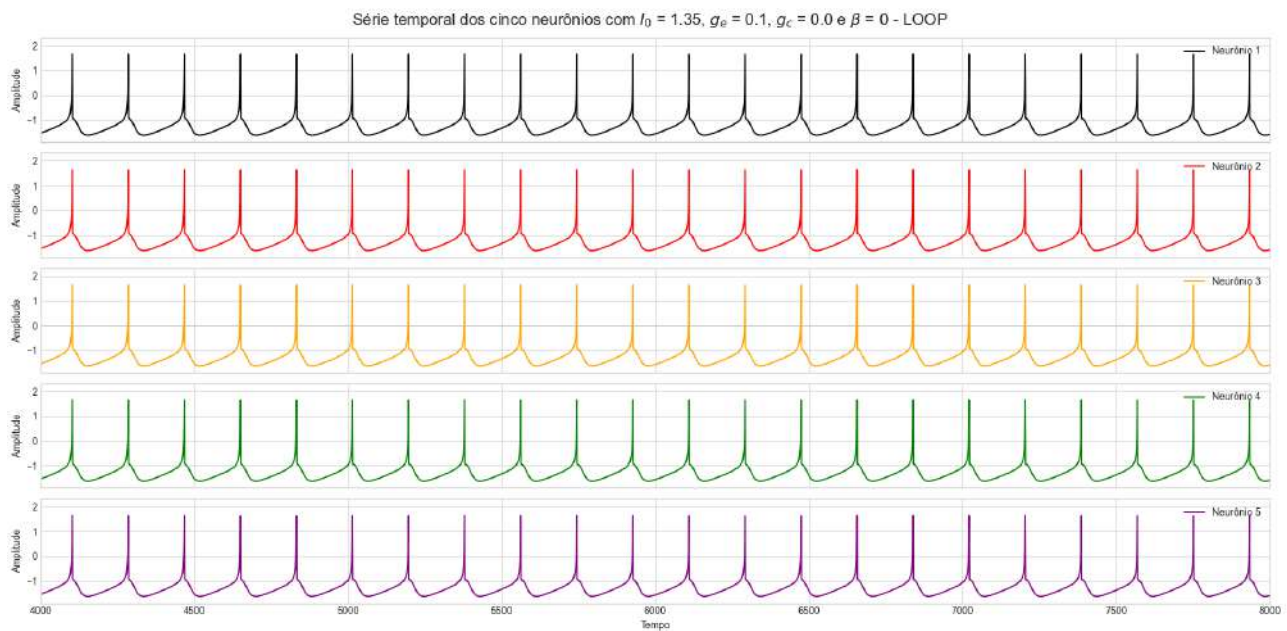
5.3.2 Acoplamento elétrico $g_e = 0.1$

Nesta etapa da análise, investigamos como diferentes intensidades de ruído influenciam a dinâmica de uma rede bidimensional composta por cinco neurônios acoplados eletricamente, com acoplamento fixo em $g_e = 0.1$. A corrente de entrada utilizada foi mantida em $I_0 = 1.35$, e o parâmetro β foi variado de forma sistemática, abrangendo desde a ausência de ruído ($\beta = 0$) até níveis altos de perturbação ($\beta = 1$).

O objetivo principal é compreender o papel do ruído como modulador da atividade oscilatória da rede. Ao alterar β , analisamos os efeitos sobre a regularidade, a amplitude e a estabilidade das séries temporais produzidas pelos neurônios, bem como a resposta global do sistema por meio da razão sinal-ruído (SNR).

Os resultados a seguir ilustram como o ruído pode desempenhar tanto papel desestabilizador quanto regulador, dependendo de sua intensidade, revelando comportamentos dinâmicos complexos e não triviais em sistemas neuronais acoplados.

Figura 72 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 0.1$ e $\beta = 0.0$ - 2D



Fonte: elaborado pela própria autora.

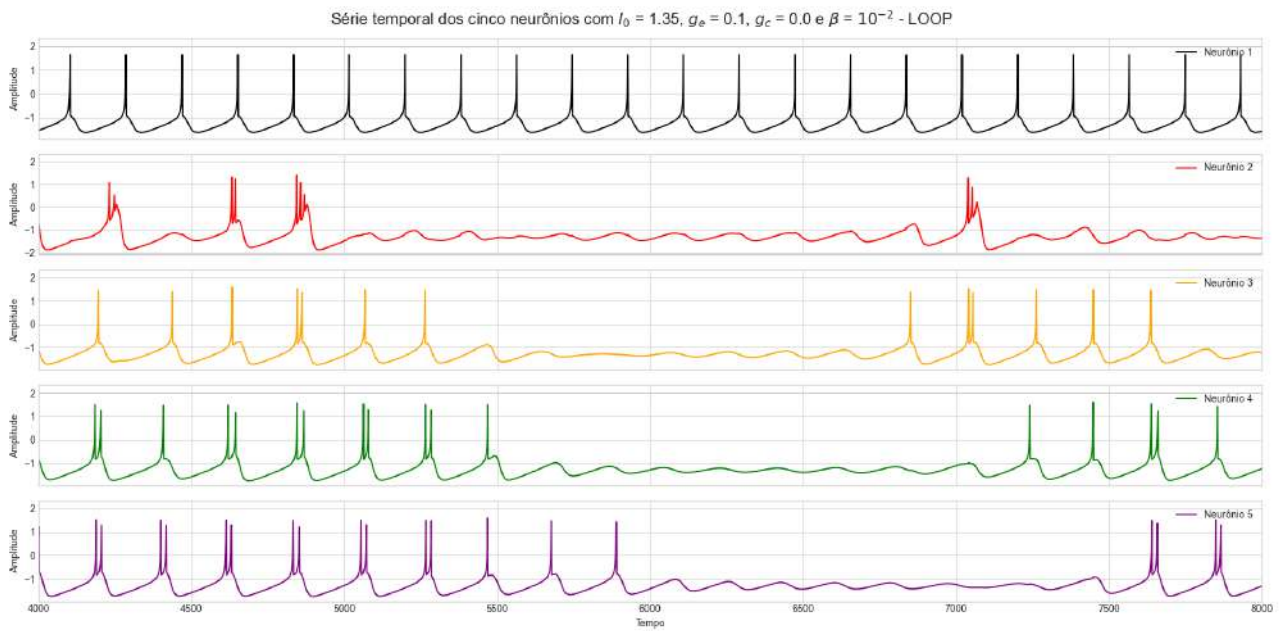
Para $\beta = 0$, Figura 72 ou seja, na ausência de ruído, o sinal apresenta oscilações amplas e não estacionárias ao longo do tempo. À medida que se introduz ruído no sistema, com $\beta > 0$, verifica-se uma mudança significativa no comportamento do sinal. Nos casos de $\beta = 10^{-3}$ e $\beta = 10^{-2}$, Figuras 73 e 74 respectivamente, as oscilações persistem, porém com amplitude reduzida em comparação ao caso sem ruído. Isso sugere que pequenas quantidades de ruído podem atuar como um mecanismo de regularização, suavizando variações extremas do sistema.

Figura 73 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 0.1$ e $\beta = 1.0 \cdot 10^{-3}$ - 2D



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 74 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 0.1$ e $\beta = 10^{-2}$ - 2D

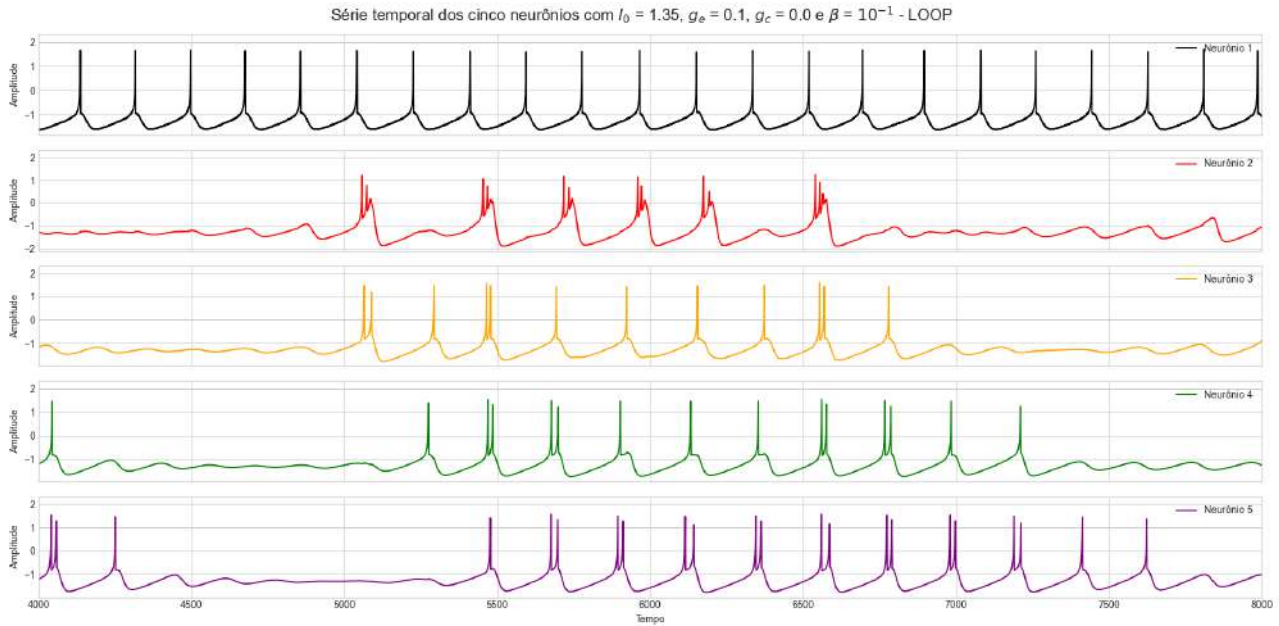


Fonte: elaborado pela própria autora.

Com o aumento de β para 10^{-1} e, especialmente, para 1, 75 e 76, o sinal torna-se progressivamente mais estável, apresentando flutuações de menor amplitude e comportamento mais regular. Esse efeito estabilizador do ruído indica que a presença de perturbações controladas resulta em atenuação da instabilidade do sistema, contribuindo para a homogeneidade do sinal gerado.

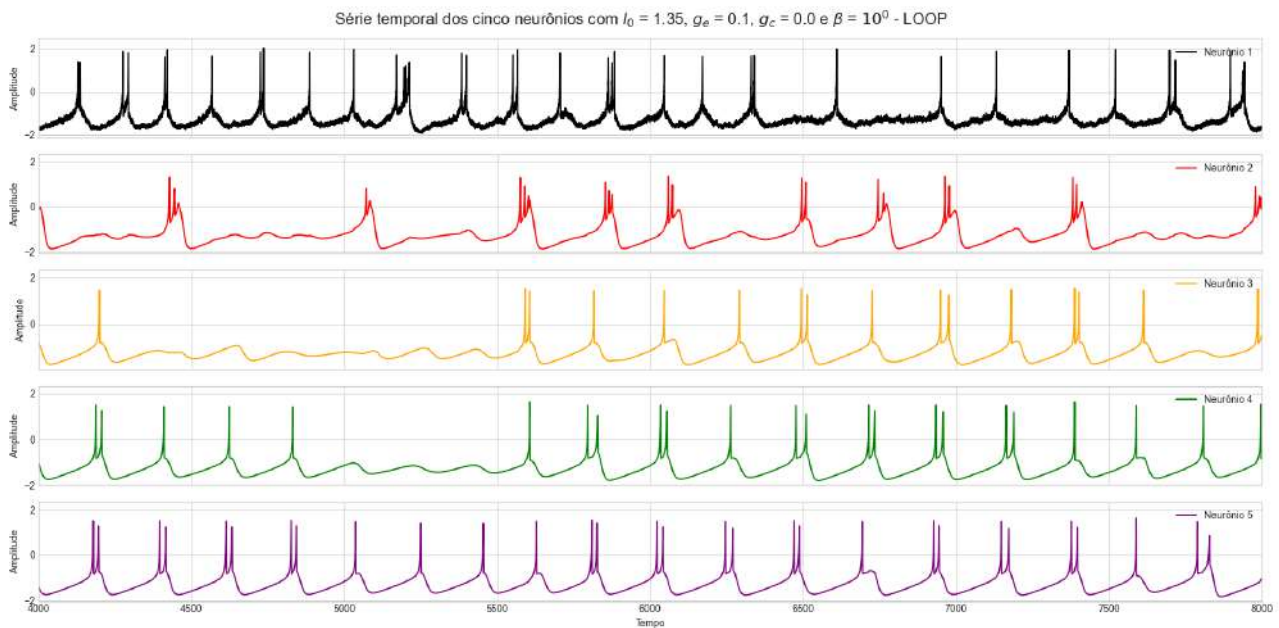
A Figura 77 complementa essa análise ao apresentar uma métrica global do sistema em função de β . Observa-se uma tendência de diminuição dessa métrica com o aumento de β , reforçando a

Figura 75 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 0.1$ e $\beta = 10^{-1}$ - 2D



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 76 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 0.1$ e $\beta = 10^0$ - 2D

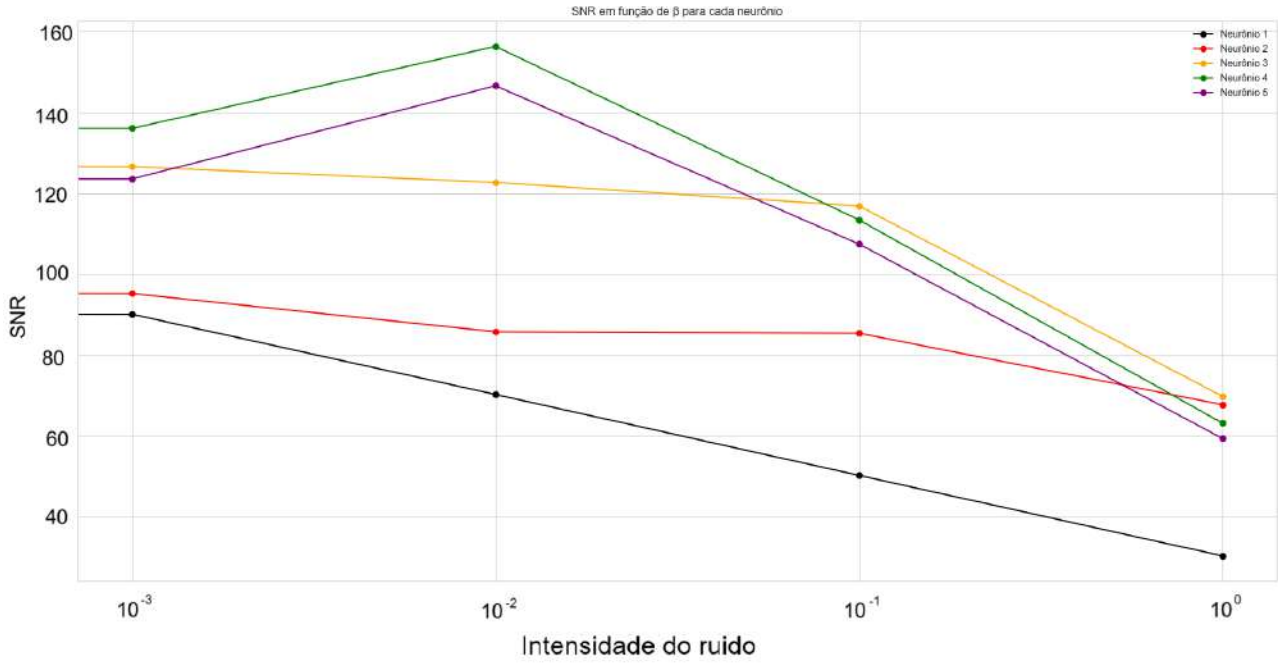


Fonte: elaborado pela própria autora.

interpretação de que o ruído atua como um elemento dissipativo, contribuindo para a regulação do comportamento dinâmico.

Portanto, conclui-se que o parâmetro β , ao controlar a intensidade do ruído no sistema, exerce papel fundamental na forma e estabilidade do sinal gerado. Com acoplamento fraco ($g_e = 0.1$), a rede apresenta comportamento irregular mesmo na ausência de ruído, com oscilações amplas e desorganizadas. No entanto, à medida que β aumenta, observa-se uma progressiva estabilização do

Figura 77 – SNR em função do β para cada neurônio com $g_e = 0.1$ - 2D



Fonte: elaborado pela própria autora.

sinal, com redução das amplitudes e maior regularidade nas séries temporais.

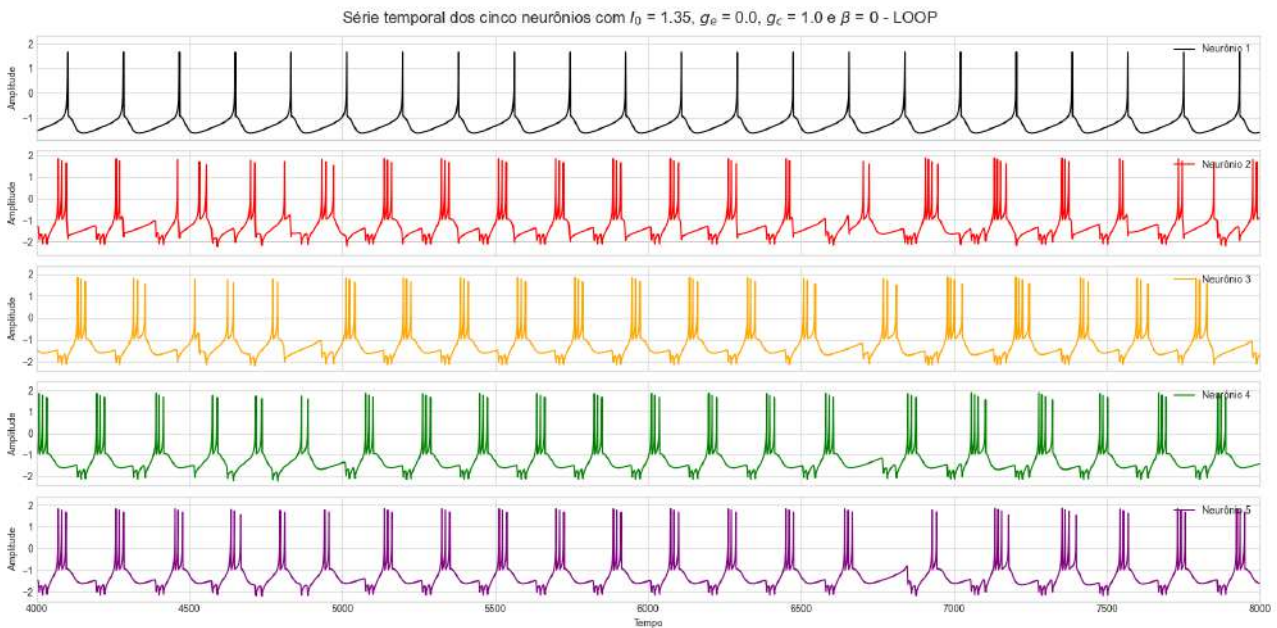
Esse efeito é notável: enquanto para $g_e = 1.0$ o ruído tende a degradar a coerência do sistema, para $g_e = 0.1$ ele atua como elemento regulador. Isso indica que, em redes fracamente acopladas, o ruído pode ter papel benéfico na organização da dinâmica, compensando a ausência de sincronização estrutural. Assim, observa-se uma inversão de papéis: o ruído, geralmente associado à desordem, aqui funciona como mecanismo de filtragem e estabilização da atividade neural.

5.3.3 Acoplamento químico $g_c = 1.0$

Nesta seção, analisamos os efeitos da presença de ruído aditivo sobre a dinâmica temporal de uma rede bidimensional de cinco neurônios acoplados quimicamente, com intensidade de acoplamento fixada em $g_c = 1.0$. Foram consideradas diferentes intensidades de ruído, controladas pelo parâmetro β , com o objetivo de investigar como perturbações externas influenciam a coerência e a estabilidade das séries temporais geradas pela rede.

No caso sem ruído ($\beta = 0$), Figura 78, observa-se uma dinâmica periódica e estável para todos os neurônios da cadeia. O neurônio 1 apresenta bursts típicos e regulares do modelo Hindmarsh-Rose, enquanto o *loop* formado pelos neurônios 2, 3 e 4 mantém oscilações quase em fase, com pequena defasagem progressiva esperada em função da estrutura da rede. O neurônio 5, ao final da cadeia, reproduz fielmente o padrão do neurônio 4, com um pequeno atraso característico da propagação ao longo da cadeia.

Figura 78 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 0.0$, $g_c = 1.0$ e $\beta = 0.0$ - 2D

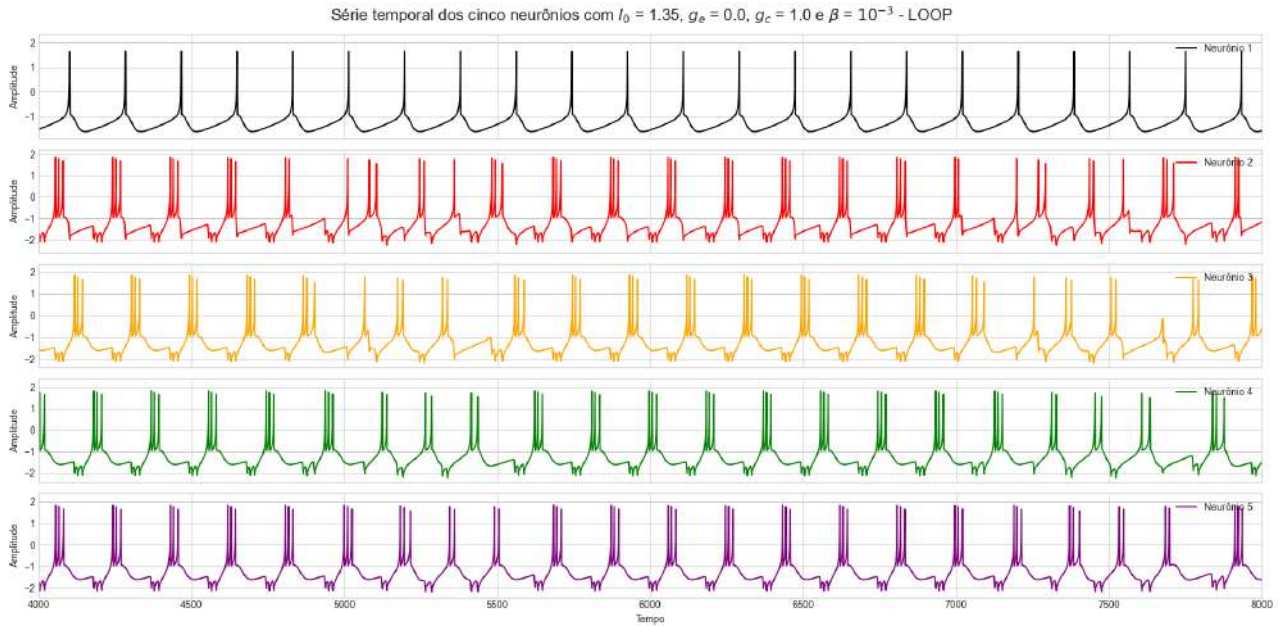


Fonte: elaborado pela própria autora.

Com o acréscimo de um ruído fraco ($\beta = 10^{-3}$), Figura 79, a dinâmica do neurônio 1 permanece praticamente inalterada. O *loop* continua preservando a coerência entre os neurônios 2, 3 e 4, mantendo oscilações bem definidas e sincronizadas. Pequenas flutuações começam a ser perceptíveis nas amplitudes, indicando uma leve influência do ruído, embora ainda insuficiente para comprometer a coesão da rede. O neurônio 5 continua exibindo um comportamento coerente com o restante da cadeia.

À medida que a intensidade do ruído é aumentada para $\beta = 10^{-2}$, Figura 80, começam a

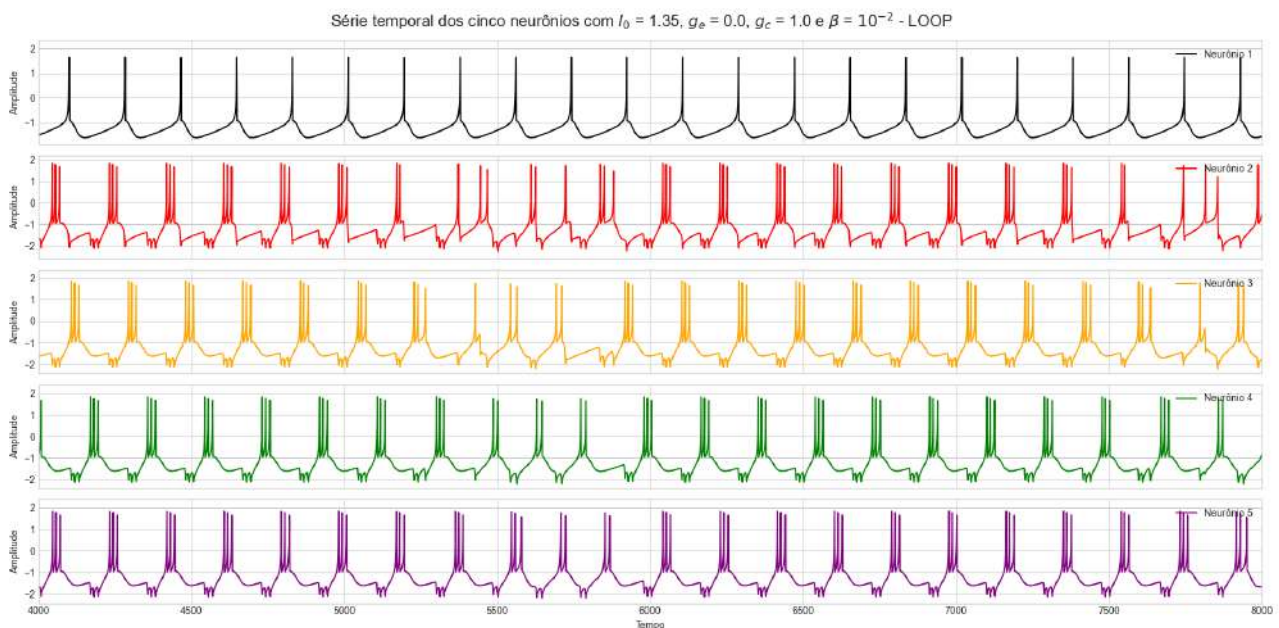
Figura 79 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_c = 1.0$ e $\beta = 10^{-3}$ - 2D



Fonte: elaborado pela própria autora.

surgir pequenas deformações nos bursts do neurônio 1, evidenciando a influência do ruído na sua dinâmica. O *loop* mostra variações mais evidentes na amplitude das oscilações, principalmente no neurônio 3, sugerindo o início de uma perda de coesão entre os neurônios. O neurônio 5 reflete essas perturbações com maior atraso e leve distorção das formas de onda.

Figura 80 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_c = 1.0$ e $\beta = 10^{-2}$ - 2D

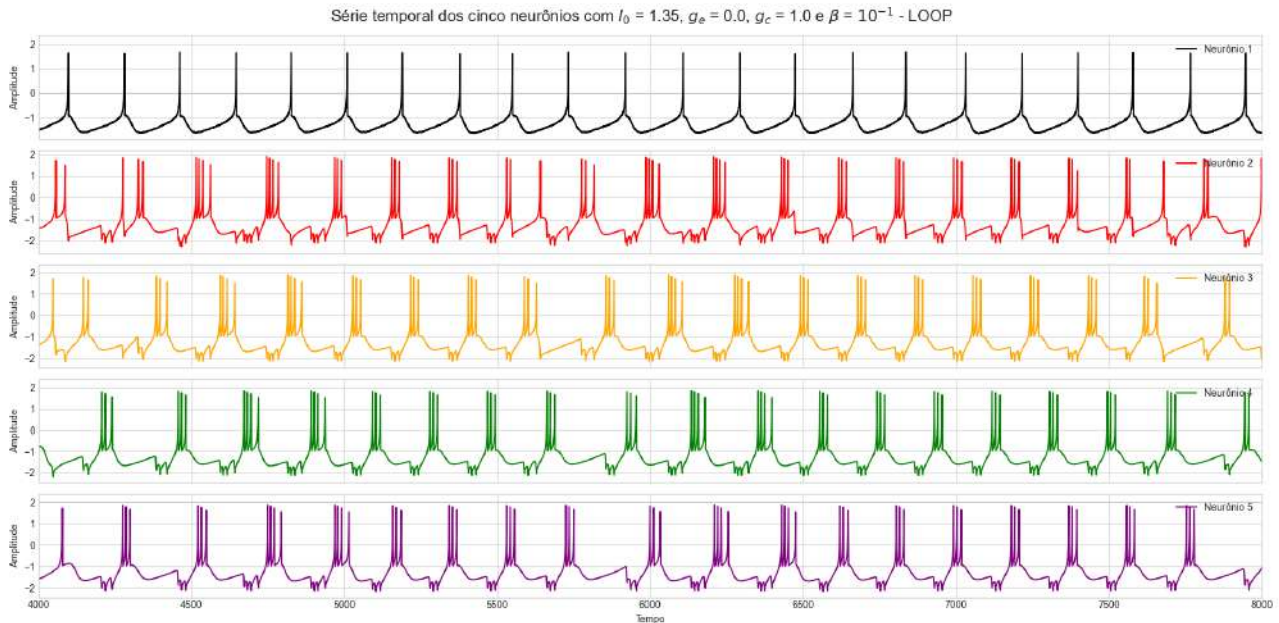


Fonte: elaborado pela própria autora.

Quando o ruído atinge uma intensidade mais considerável como se mostra na Figura 81 ($\beta = 10^{-1}$), as deformações nos bursts do neurônio 1 tornam-se mais evidentes, com variações signifi-

cativas na amplitude. O *loop* começa a apresentar uma assimetria clara entre os neurônios 2, 3 e 4, sendo o neurônio 3 particularmente mais afetado, possivelmente em função da sua posição intermediária no *loop*. O neurônio 5 apresenta oscilações mais desorganizadas e atrasos variáveis, refletindo a degradação da coerência na propagação da atividade.

Figura 81 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 1.0$ e $\beta = 10^{-1}$ - 2D

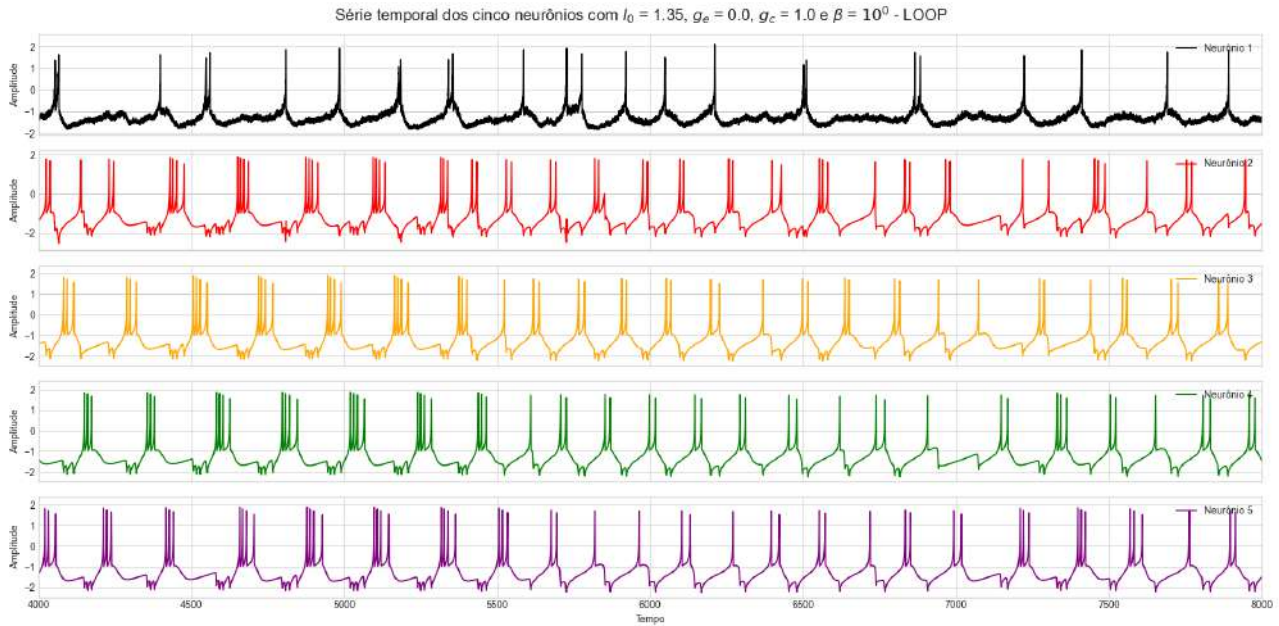


Fonte: elaborado pela própria autora.

Por fim, no caso de ruído forte ($\beta = 1$), Figura 82, o neurônio 1 exibe sinais evidentes da ação do ruído, com bursts deformados e variações irregulares de amplitude e fase. O *loop* deixa de atuar como estabilizador eficaz: os neurônios 2, 3 e 4 apresentam oscilações menos coordenadas, com divergências claras entre suas dinâmicas. O neurônio 3, por sua posição central no *loop*, tende a acumular mais fortemente os efeitos das perturbações, sendo o mais vulnerável à propagação do ruído. O neurônio 5, por sua vez, exibe oscilações com deformações acentuadas e maior irregularidade, evidenciando que, nesse regime, o ruído se propaga por toda a cadeia e compromete a estabilidade da dinâmica.

Os resultados evidenciam que o *loop* formado pelos neurônios 2-3-4 atua como uma estrutura estabilizadora da dinâmica da cadeia, mitigando a propagação direta do ruído aplicado ao neurônio 1, especialmente para intensidades fracas e moderadas de ruído ($\beta \leq 10^{-3}$). Todavia, à medida que a intensidade do ruído cresce, a capacidade do *loop* de isolar e amortecer as perturbações diminui, permitindo que o ruído se propague e amplifique, resultando na perda de coerência e estabilidade dos neurônios subsequentes. Nota-se que o neurônio 3 é particularmente sensível ao ruído acumulado no *loop*, provavelmente devido à sua posição intermediária. Finalmente, observa-se que, sob ruído intenso, o neurônio 5 exibe oscilações fortemente deformadas, evidenciando a

Figura 82 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 1.0$ e $\beta = 10^0$ - 2D



Fonte: elaborado pela própria autora.

superação da capacidade de amortecimento da rede.

A Figura 84 apresenta a relação sinal-ruído (SNR) dos cinco neurônios da cadeia com *loop* local, em função da intensidade do ruído β . De modo geral, os resultados reforçam as observações qualitativas feitas a partir das séries temporais previamente analisadas. Observa-se que o neurônio 1, que é o único diretamente exposto ao ruído, apresenta uma leve degradação no SNR à medida que β aumenta, especialmente para os valores intermediários de ruído. Para $\beta = 10^{-1}$, nota-se uma queda mais acentuada no SNR, refletindo a crescente influência do ruído sobre a dinâmica desse neurônio. Curiosamente, para $\beta = 1$, o SNR do neurônio 1 apresenta uma leve recuperação, o que pode ser atribuído ao fato de que, em intensidades muito altas, o ruído tende a dominar completamente a dinâmica, mascarando as variações internas e levando a uma estabilização estatística do sinal.

Os neurônios 2 e 3 também exibem uma redução do SNR com o aumento da intensidade do ruído, sendo que o neurônio 3 é mais sensível às perturbações, como já havia sido indicado anteriormente pela análise das séries temporais. Essa maior sensibilidade do neurônio 3 pode ser explicada por sua posição central no *loop*, tornando-o mais suscetível à acumulação e propagação das perturbações provenientes do neurônio 1 através do acoplamento químico. O neurônio 4 apresenta o comportamento mais estável ao longo das variações de β , mantendo o SNR em níveis superiores aos dos neurônios 2 e 3, o que reforça a interpretação de que ele desempenha um papel estabilizador dentro da estrutura do *loop*.

Por sua vez, o neurônio 5, localizado ao final da cadeia, mostra um comportamento peculiar: seu SNR atinge o valor mais elevado em $\beta = 10^{-2}$, o que sugere que, em regimes de ruído moderado,

a estrutura de acoplamento ainda é capaz de propagar uma atividade relativamente coerente até o final da cadeia. Contudo, para $\beta = 1$, seu SNR converge para valores próximos aos dos demais neurônios, evidenciando que a capacidade da rede de preservar a coerência dinâmica é comprometida em condições de ruído intenso. Esses resultados quantitativos confirmam que o *loop* atua como uma estrutura mitigadora do ruído propagado, especialmente para baixos e moderados níveis de perturbação. No entanto, à medida que a intensidade do ruído cresce, essa função amortecedora perde eficácia, permitindo que as flutuações induzidas pelo ruído contaminem toda a cadeia, prejudicando a estabilidade da dinâmica global.

Figura 83 – SNR em função do β para cada neurônio com $g_c = 1.0$ - 2D

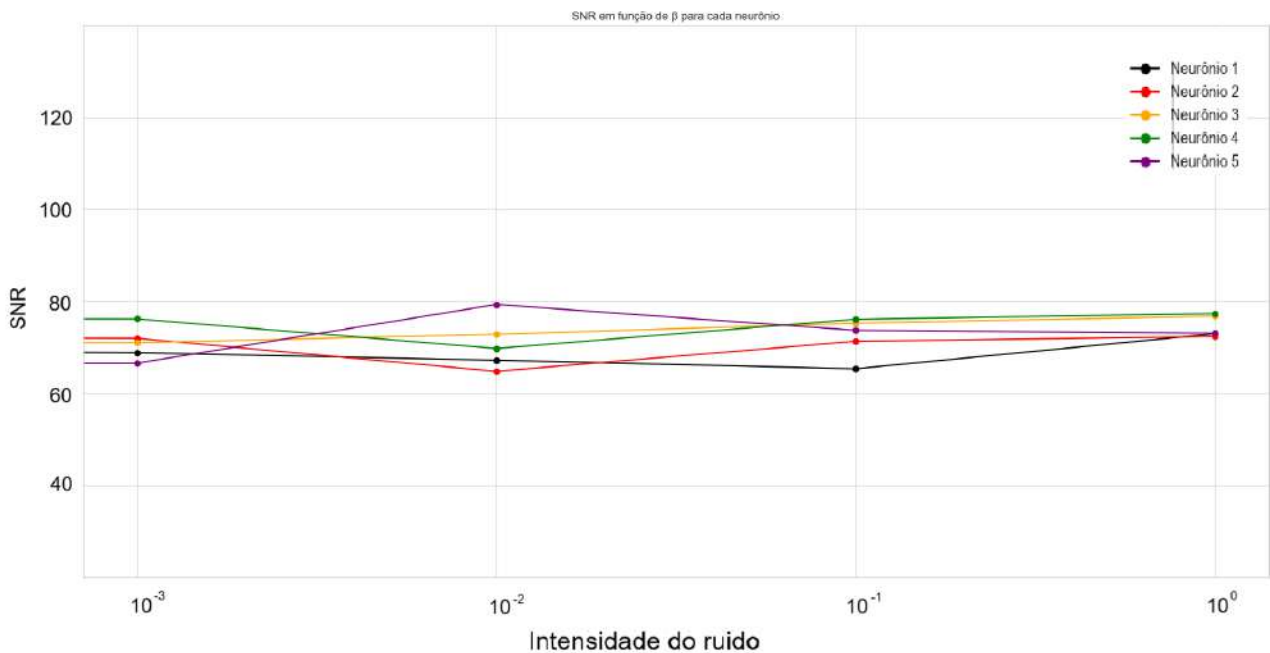


Figura 84 – SNR em função do β para cada neurônio com $g_c = 1.0$ - 2D

Fonte: elaborado pela própria autora.

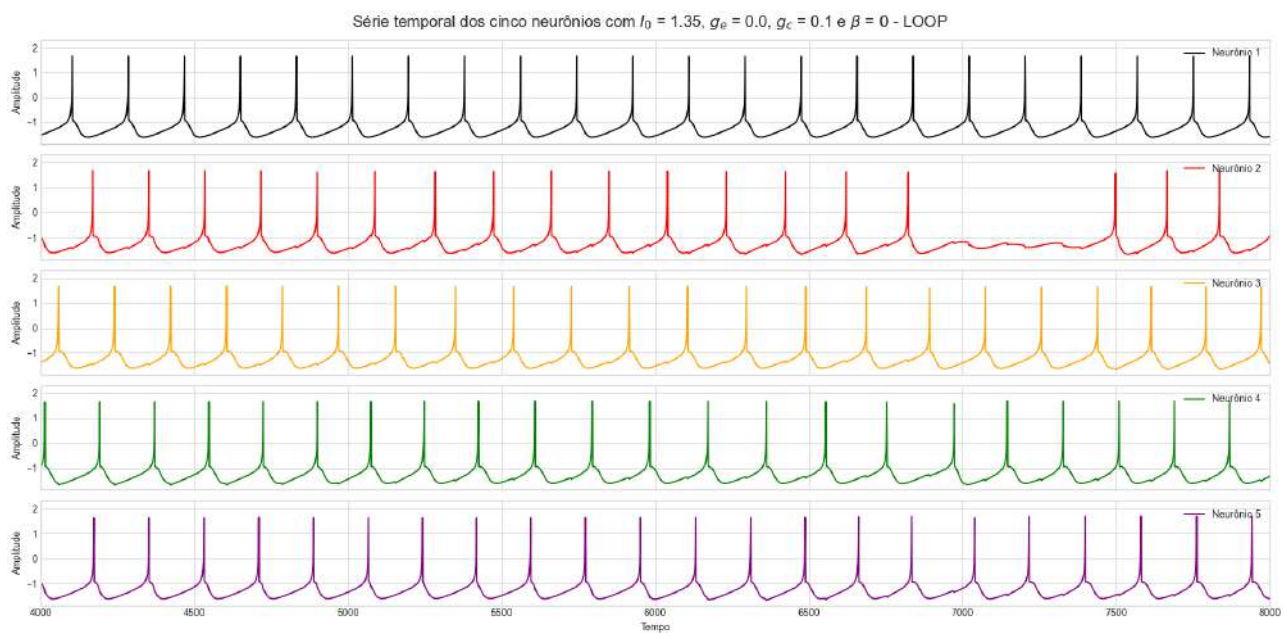
5.3.4 Acoplamento químico $g_c = 0.1$

Encerrando a análise dos efeitos do ruído externo na dinâmica neural, esta subseção apresenta os resultados para uma rede bidimensional com acoplamento químico fraco ($g_c = 0.1$). Diferente dos casos anteriores, em que o ruído induzia instabilidades ou dessincronização, aqui observamos uma tendência oposta: a presença de ruído progressivamente mais intenso leva à atenuação das oscilações e ao amortecimento da atividade coletiva.

Com a corrente de entrada fixada em $I_0 = 1.35$, são analisadas as séries temporais dos cinco neurônios para diferentes intensidades de ruído ($\beta = 0$ a $\beta = 1$), além da evolução da razão sinal-ruído (SNR). A presença de realimentação química via *loops* funcionais torna este regime particularmente sensível a pequenas perturbações, o que favorece o surgimento de comportamentos estabilizados, mesmo em redes dinâmicas.

Os resultados discutidos a seguir destacam a capacidade do ruído de atuar como um elemento regulador em topologias com acoplamento químico, reduzindo a variabilidade e promovendo padrões de comportamento mais previsíveis.

Figura 85 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 0.1$ e $\beta = 0.0$ - 2D

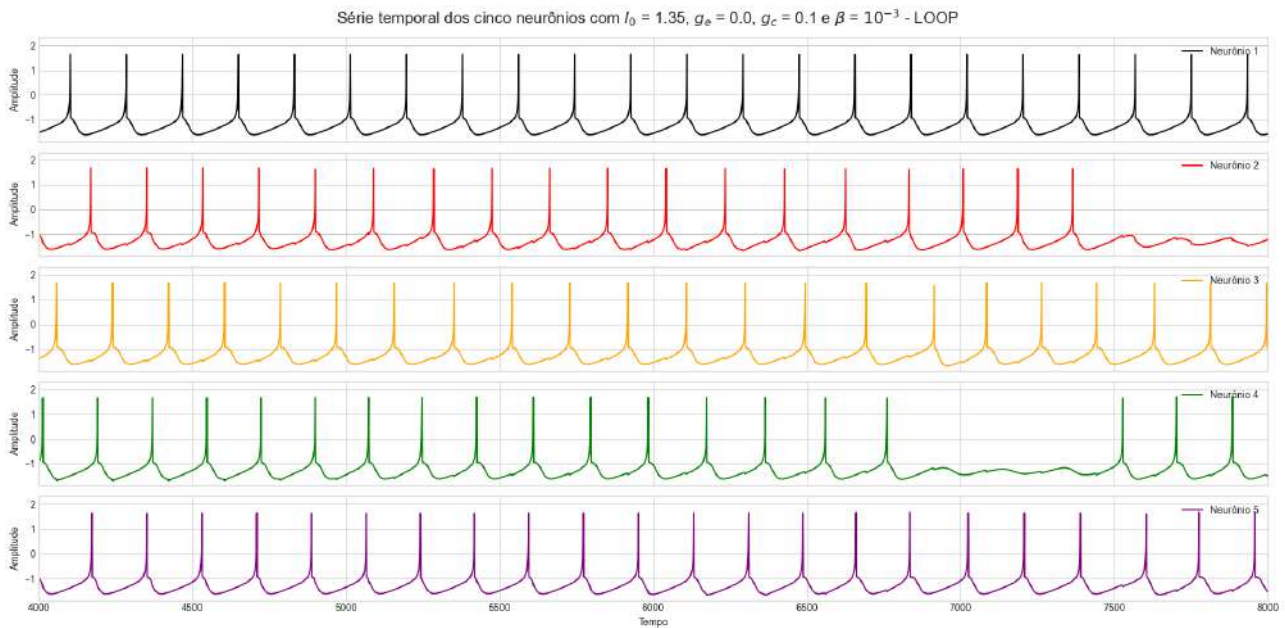


Fonte: elaborado pela própria autora.

Com $\beta = 10^{-3}$, Figura 86, nota-se uma dinâmica oscilatória predominante, mas com leve indício de moderação na amplitude das oscilações. A introdução de um valor pequeno de β começa a impactar a evolução das séries, ainda que de forma sutil. O sistema mantém uma aparência instável, mas menos desordenada do que no caso anterior. Com $\beta = 10^{-2}$, Figura 87, as oscilações tornam-se visivelmente menos intensas. Há uma redução na amplitude e uma maior suavidade no

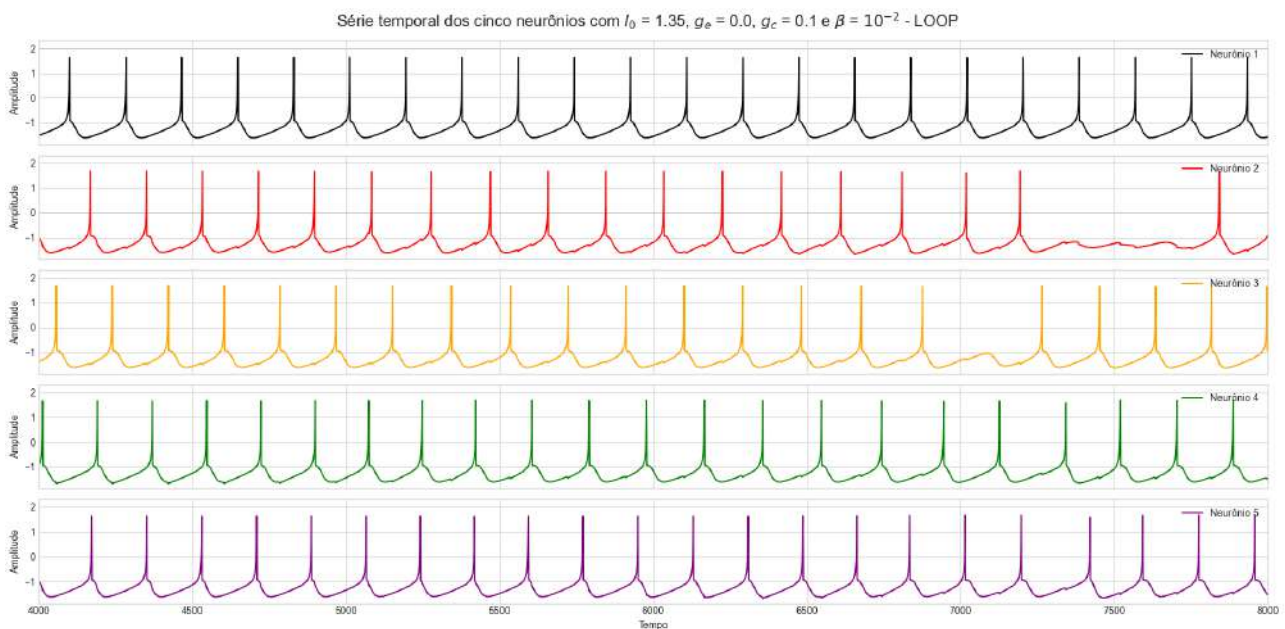
comportamento das séries. Embora o sistema ainda apresente variações, já se percebe uma tendência à estabilização, evidenciando um efeito de amortecimento mais pronunciado.

Figura 86 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 0.1$ e $\beta = 10^{-3}$ - 2D



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 87 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_e = 0.1$ e $\beta = 10^{-2}$ - 2D



Fonte: elaborado pela própria autora.

Com $\beta = 10^{-1}$, Figura 88, o comportamento do sistema é significativamente mais regular. As séries temporais apresentam oscilações suaves ou tendem à estabilidade após algumas iterações. O efeito do *loop* ainda influencia o início da dinâmica, mas o aumento do parâmetro β introduz

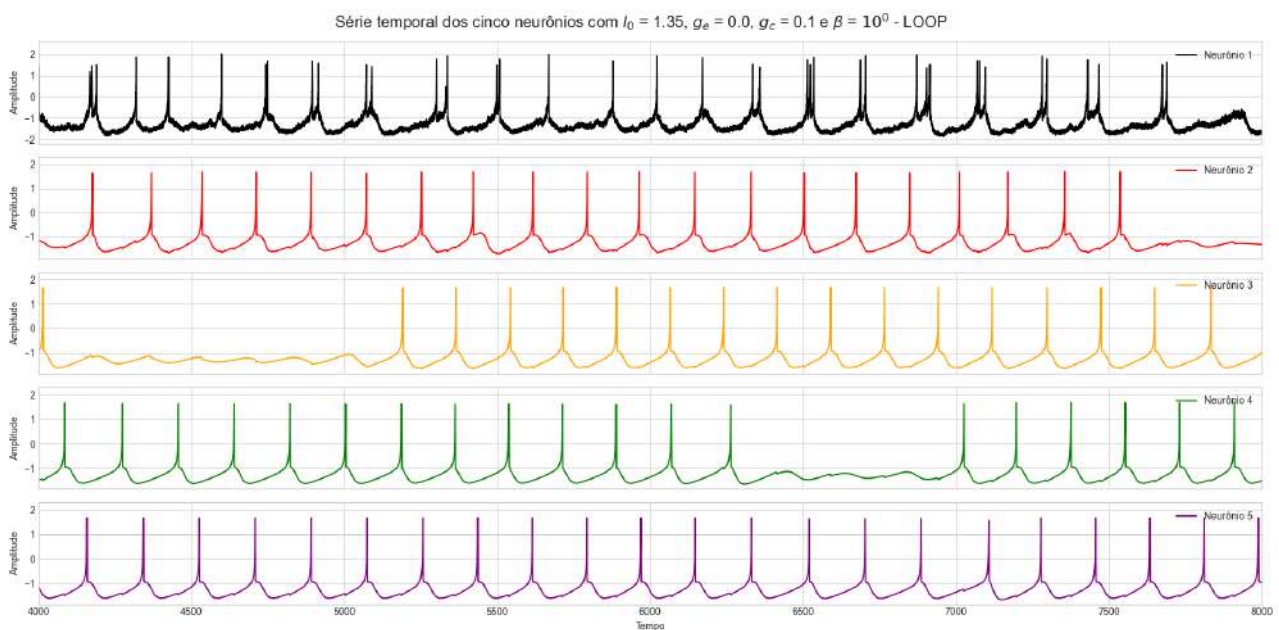
um controle eficiente, reduzindo variações excessivas e promovendo uma evolução mais previsível. E para $\beta = 1$, Figura 89, observa-se um comportamento de forte atenuação do ruído ao longo da rede. As séries convergem rapidamente para valores estáveis, com ausência quase total de ruído e múltiplas oscilações. A dinâmica torna-se muito mais regular, indicando que o efeito do *loop* gerou supressão do ruído provavelmente devido à retroalimentação mesmo com um β elevado.

Figura 88 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_c = 0.1$ e $\beta = 10^{-1}$ - 2D

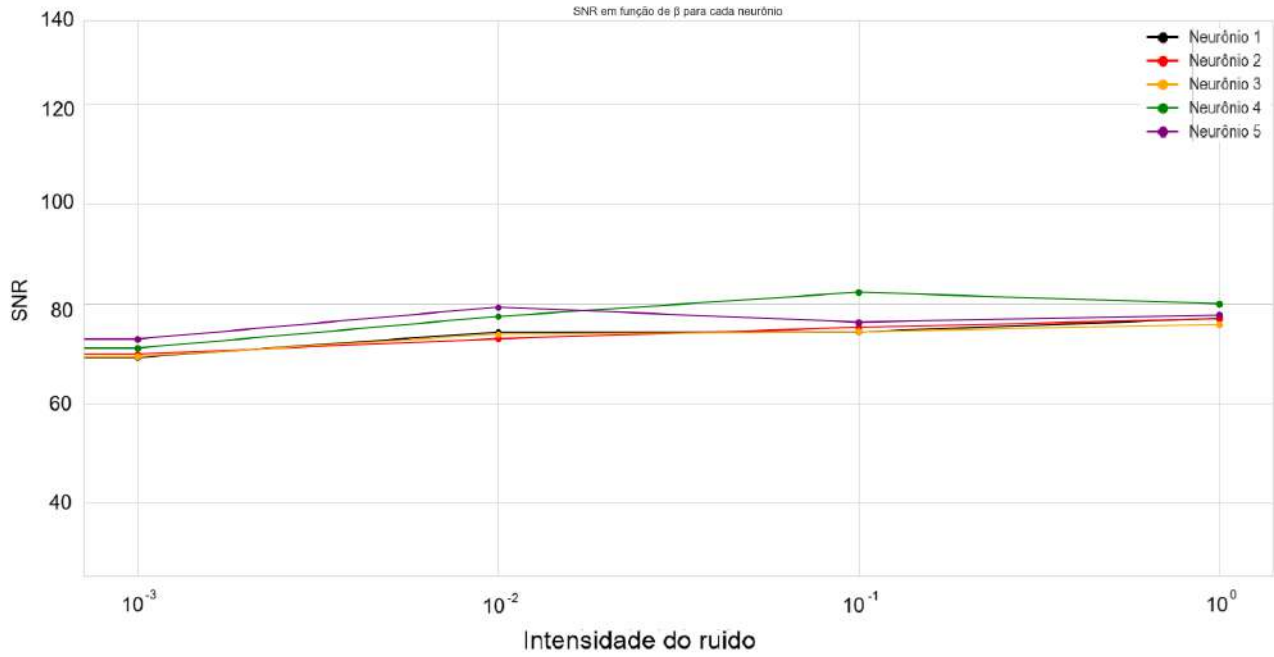


Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 89 – Séries temporais dos cinco neurônios com $I_0 = 1.35$, $g_c = 0.1$ e $\beta = 10^0$ - 2D



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 90 – SNR em função do β para cada neurônio com $g_c = 0.1$ - 2D

Fonte: elaborado pela própria autora.

Este é um resultado que evidencia uma evolução extraordinária rumo a um sinal "limpo" de ruído, com baixa variabilidade e comportamento altamente regular, ver Figura 90. A rede, inicialmente instável, passa a exibir um padrão coerente e suave, mesmo em presença de acoplamento químico fraco. Esse comportamento vai na mesma direção do observado para $g_c = 1.0$, onde também se nota uma certa reorganização em níveis altos de ruído. No entanto, aqui o efeito é ainda mais espetacular: a dinâmica inicialmente desordenada evolui para um regime de estabilidade notável, ressaltando o papel do ruído como agente organizador em sistemas fracamente acoplados.

5.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO 5

Os resultados apresentados neste capítulo mostram de forma clara que a introdução de ruído branco gaussiano exerce um papel rico e variado na dinâmica de redes de neurônios Hindmarsh-Rose, afetando tanto a regularidade das oscilações individuais quanto a propagação e a coerência coletiva dos sinais ao longo das cadeias neuronais.

Observamos que para um neurônio isolado, o aumento do nível de ruído provoca uma degradação gradual do padrão de disparos, resultando em oscilações irregulares e espectros de potência mais dispersos. Esse efeito é atenuado em baixas intensidades de ruído, onde o sistema ainda consegue manter uma dinâmica aproximadamente periódica.

Nas cadeias unidimensionais com acoplamento elétrico forte ($g_e = 1.0$), o ruído aplicado ao neurônio inicial propaga-se de maneira eficiente ao longo da rede à medida que sua intensidade

aumenta. A análise da relação sinal-ruído (SNR) confirma que, para níveis baixos e moderados de ruído, os neurônios mais distantes apresentam uma maior resistência às perturbações, atuando como filtros naturais. Contudo, sob ruído intenso ($\beta = 1$), todos os neurônios exibem perda acentuada de coerência e estabilidade.

No caso do acoplamento elétrico fraco ($g_e = 0.1$), observou-se que o ruído induz instabilidades locais no neurônio inicial, mas sua propagação ao longo da rede é atenuada. Curiosamente, em intensidades muito altas, ocorre uma espécie de estabilização passiva da dinâmica, sugerindo que o ruído pode, paradoxalmente, restaurar padrões oscilatórios mais regulares em neurônios distantes.

As redes com acoplamento químico ($g_c = 1.0$ e $g_c = 0.1$) mostraram comportamento mais robusto diante da introdução de ruído. O acoplamento químico forte ($g_c = 1.0$) foi particularmente eficaz em isolar as perturbações aplicadas ao neurônio inicial, preservando a coerência e a regularidade das oscilações nos neurônios subsequentes. O neurônio central no *loop* (x_3) mostrou-se mais sensível, conforme evidenciado pelo SNR e pelas séries temporais. O acoplamento químico fraco ($g_c = 0.1$) revelou um comportamento interessante: o ruído atuou como um elemento estabilizador, suprimindo as oscilações excessivas e conduzindo a rede a regimes mais estáveis e previsíveis.

Finalmente, na topologia bidimensional com *loop*, a introdução de ruído seguiu padrões semelhantes: para intensidades baixas e moderadas, o *loop* funcionou como atenuador das perturbações, enquanto intensidades mais altas resultaram na quebra progressiva da coerência. O neurônio 5 foi o mais protegido em regimes de ruído fraco.

Esses resultados permitem concluir que a estrutura da rede, a intensidade do acoplamento e a posição topológica dos neurônios desempenham papéis cruciais na modulação dos efeitos do ruído. O ruído pode tanto degradar a coerência da rede quanto, em alguns casos, induzir regularização das oscilações em sistemas fracamente acoplados.

Quadro 3 – Resumo qualitativo dos efeitos do ruído nas diferentes topologias e acoplamentos analisados.

Topologia	Acoplamento	Ruído	Efeito Observado
Unidimensional	$g_e = 1, 0$	Baixo	Propagação mínima do ruído, rede filtra ruído
Unidimensional	$g_e = 1, 0$	Alto	Ruído propaga, todos os neurônios perdem coerência
Unidimensional	$g_e = 0, 1$	Baixo	Ruído local no neurônio 1, pouca propagação do ruído
Unidimensional	$g_e = 0, 1$	Alto	Ruído atenua oscilações, estabiliza sinais
Unidimensional	$g_c = 1, 0$	Baixo	Rede robusta, preserva coerência
Unidimensional	$g_c = 1, 0$	Alto	Perturba neurônio 1 e 3, demais mantêm regularidade
Unidimensional	$g_c = 0, 1$	Baixo	Pouca propagação, rede estável
Unidimensional	$g_c = 0, 1$	Alto	Ruído suprime oscilações, estabiliza
Bidimensional com loop	$g_e = 1, 0$	Baixo	Ruído não se propaga ao longo da cadeia
Bidimensional com loop	$g_e = 1, 0$	Alto	Comportamento desordenado, oscilações irregulares
Bidimensional com loop	$g_e = 0, 1$	Baixo	Ruído propaga, disparos irregulares
Bidimensional com loop	$g_e = 0, 1$	Alto	Menor flutuação da amplitude, atenuação da instabilidade
Bidimensional com loop	$g_c = 1, 0$	Baixo	Rede preserva regularidade
Bidimensional com loop	$g_c = 1, 0$	Alto	<i>Bursts</i> deformados, maior irregularidade
Bidimensional com loop	$g_c = 0, 1$	Baixo	Rede preserva regularidade
Bidimensional com loop	$g_c = 0, 1$	Alto	Ruído estabiliza dinamicamente

Fonte: elaborado pela própria autora.

6 SINCRONISMO DA REDE

O fenômeno do sincronismo em sistemas dinâmicos complexos é um dos tópicos centrais no estudo da dinâmica de redes acopladas. De modo geral, sincronização pode ser entendida como a tendência de dois ou mais sistemas oscilatórios ajustarem seus comportamentos temporais em função de interações mútuas ou influência externa comum, Pikovsky, Rosenblum e Kurths (2003) e Boccaletti *et al.* (2002). Em redes neuronais, a sincronização está diretamente associada à coerência temporal das atividades elétricas dos neurônios, sendo responsável por processos fundamentais em sistemas biológicos, como percepção sensorial, coordenação motora e cognição, Buzsáki (2006).

Do ponto de vista teórico, a sincronização pode se manifestar de diferentes formas, incluindo sincronismo completo, de fase, generalizado, *lag-sincronization*, entre outros tipos, Boccaletti *et al.* (2002) e Arenas *et al.* (2008). Particularmente em redes neuronais, fenômenos de sincronização parcial ou intermitente são observados com frequência, especialmente quando fatores como ruído, heterogeneidade ou topologia complexa influenciam o sistema, Izhikevich (2003), Breakspear, Heitmann e Daffertshofer (2010).

Neste trabalho, a análise da sincronização das redes de neurônios foi realizada por meio da ferramenta de correlação cruzada, permitindo identificar a similaridade temporal entre pares de neurônios mesmo quando há atrasos relativos entre os sinais. A escolha deste método se deve à sua eficácia em detectar sincronização e também em evidenciar possíveis defasagens no tempo entre os sinais.

Os estudos apresentados ao longo deste capítulo contemplam redes organizadas tanto em topologia unidimensional quanto bidimensional, considerando diferentes níveis de acoplamento elétrico e químico, com e sem a presença de ruído aditivo. As análises visam compreender de que forma tais fatores estruturais e dinâmicos afetam a emergência e a robustez da sincronização entre os neurônios da rede.

6.1 CORRELAÇÃO CRUZADA

A correlação cruzada é um método de processamento de sinais para analisar a similaridade entre dois sinais mesmo com atrasos entre eles. Desta forma é possível saber se os sinais são similares em tempos diferentes.

A correlação cruzada contínua entre dois sinais $x(t)$ e $y(t)$ é definida por:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y(t + \tau) dt \quad (6.1)$$

Discretizando essa expressão, com $\tau \rightarrow l$ e assumindo amostras $x[n]$ e $y[n]$, temos a forma discreta da correlação cruzada:

$$R_{xy}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot y[n+l] \quad (6.2)$$

Se os sinais forem finitos, de comprimento N , a expressão pode ser escrita como:

$$R_{xy}[l] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot y[n+l] \quad (6.3)$$

Com o entendimento de que $y[n+l] = 0$ sempre que o índice estiver fora dos limites do vetor.

No caso deste estudo foram testados para diferentes valores de acoplamento elétrico e químico no sistema unidimensional e também no bidimensional.

6.2 TOPOLOGIA UNIDIMENSIONAL COM MÚLTIPLOS NEURÔNIOS

Após a análise da dinâmica temporal dos neurônios sob diferentes condições de ruído e topologias de acoplamento, esta seção tem como objetivo aprofundar o estudo dos mecanismos de sincronização na rede neural, por meio de duas ferramentas complementares: a correlação cruzada e a análise da relação de fase entre pares de neurônios.

A investigação é conduzida sobre uma rede unidimensional de cinco neurônios com acoplamento elétrico ($g_e = 1,0$) ou químico ($g_c = 1,0$) unidirecional inicialmente na ausência de ruído ($\beta = 0$). Essa configuração permite isolar os efeitos do acoplamento na organização temporal da rede, sem a interferência de perturbações estocásticas. Em seguida são analisados os comportamentos dos acoplamentos para crescentes valores de ruído.

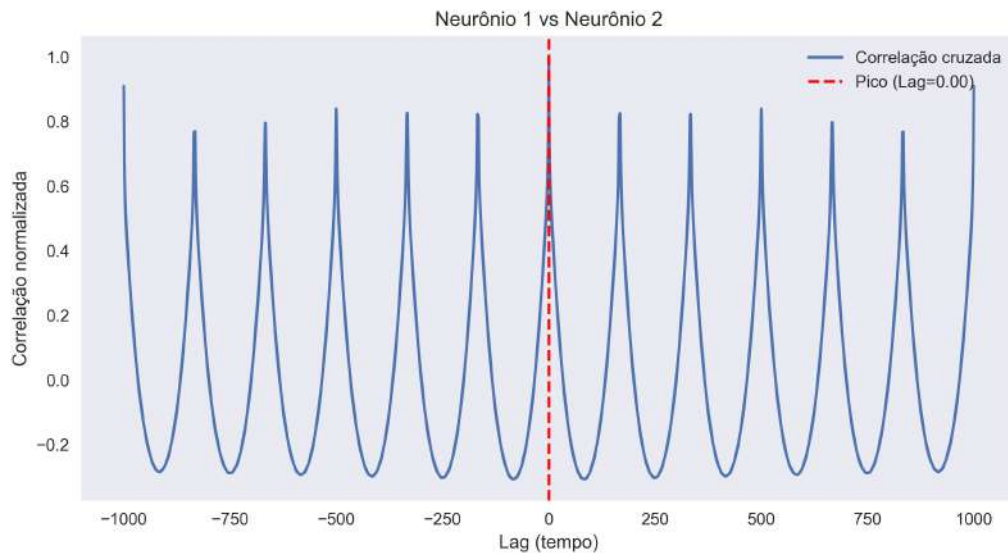
A correlação cruzada fornece informações sobre a semelhança temporal entre sinais neurais e permite identificar atrasos ou sincronizações entre pares de neurônios, enquanto a relação de fase entre seus sinais revela como essas interações se organizam ao longo do tempo. Ambas as análises são fundamentais para compreender a propagação da atividade oscilatória na rede e os padrões de coerência resultantes da topologia de acoplamento imposta.

6.2.1 Acoplamento elétrico $g_e = 1.0$, sem ruído - 1D

Os resultados apresentados a seguir visam caracterizar a estrutura funcional da rede em termos de coerência temporal, defasagem e hierarquia na propagação da dinâmica oscilatória, revelando como

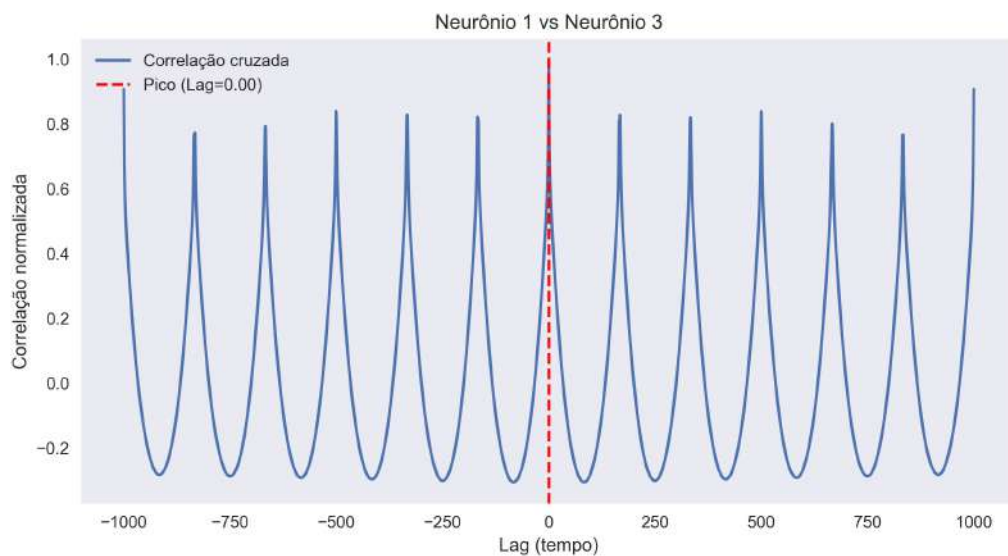
a direção do acoplamento e a ausência de ruído contribuem para o estabelecimento de sincronização estável ao longo da cadeia neuronal.

Figura 91 – Correlação cruzada entre neurônio 1 e o 2



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 92 – Correlação cruzada entre neurônio 1 e o 3

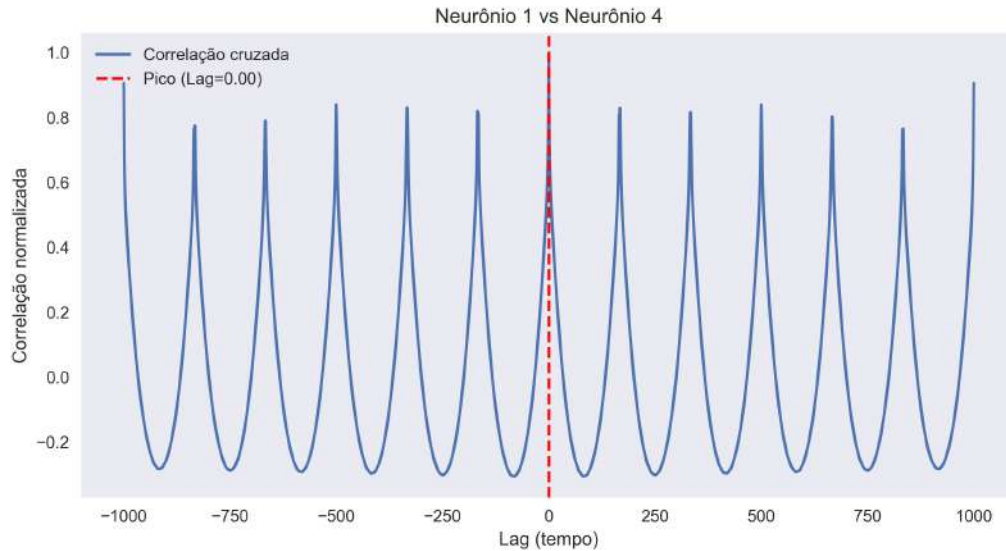


Fonte: elaborado pela própria autora.

A análise da correlação cruzada entre o neurônio 1 e os demais neurônios da rede (neurônios 2, 3, 4 e 5), ver Figuras 91 a 94, sob a consideração de acoplamento elétrico unidirecional, revela padrões semelhantes entre os diferentes pares, porém com nuances interpretativas importantes.

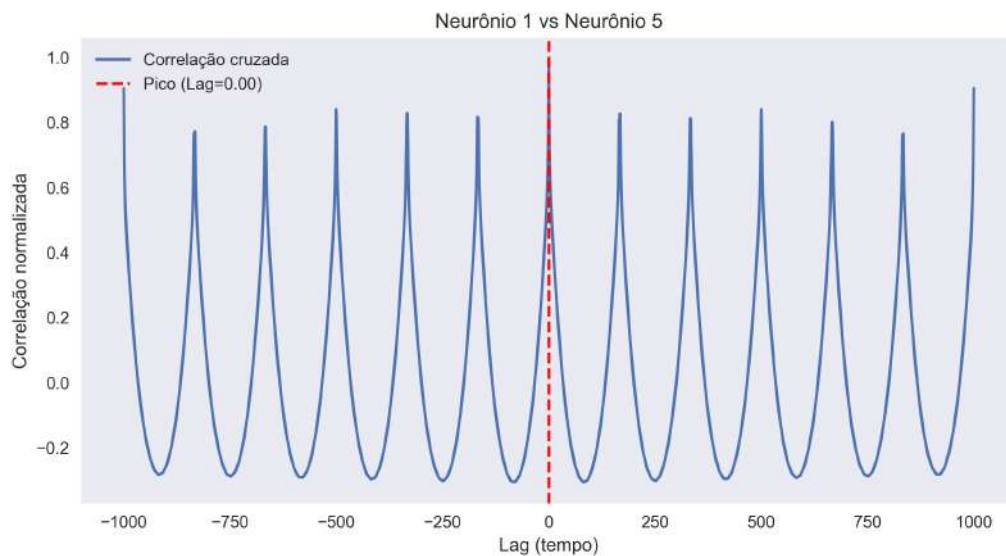
A função de correlação cruzada mantém um formato regular e repetido, aproximadamente simétrico, indicando um comportamento rítmico e coordenado entre os sinais neurais. No entanto, a

Figura 93 – Correlação cruzada entre neurônio 1 e o 4



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 94 – Correlação cruzada entre neurônio 1 e o 5



Fonte: elaborado pela própria autora.

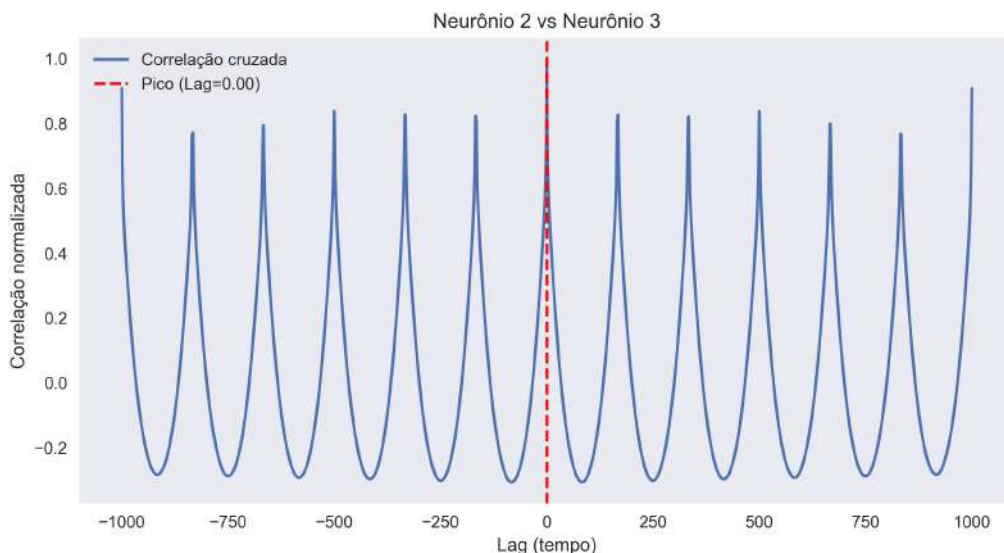
unidirecionalidade do acoplamento implica que a sincronização observada decorre de uma influência causal do neurônio 1 e em cadeia sobre os demais e não de uma interação mútua.

O pico máximo da correlação ocorre sempre em torno de *lag* zero em todas as curvas, o que indica que os sinais dos neurônios receptores (2 a 5) estão sincronizados com o sinal do neurônio 1, Figuras 95 a 97. Como o acoplamento é unidirecional, essa sincronia temporal próxima de zero indica que o neurônio 1 como oscilador mestre, seus disparos guiam os disparos dos demais neurônios com defasagem temporal mínima. Esse padrão confirma que há uma forte coerência temporal induzida pelo forte acoplamento ($g_e = 1$) e definido pela direção do acoplamento elétrico.

Note que a função da correlação cruzada está normalizada e com valores próximos de 1 nos picos

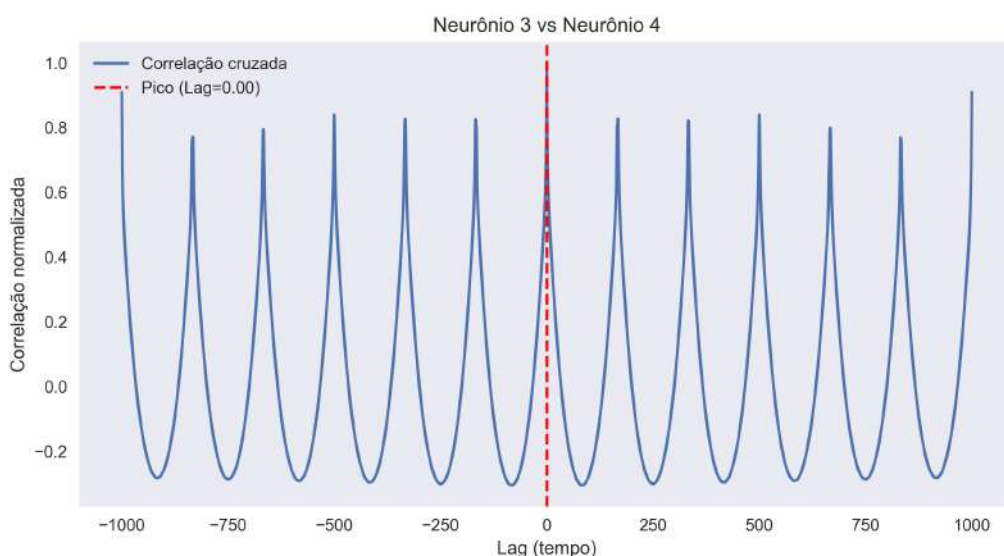
centrais. Este resultado é uma assinatura da reforça a existência de uma forte dependência temporal dos neurônios receptores em relação ao neurônio 1. Diferenças nos lobos laterais das funções de correlação cruzada — como os picos laterais mais agudos no par 1-2 (Figura 91) e mais suavizados nos pares com os neurônios 3, 4 e 5 (Figuras 92 a 94) podem ser interpretadas como efeito da eficiência de propagação do sinal ao longo da rede.

Figura 95 – Correlação cruzada entre neurônios 2 e 3



Fonte: elaborado pela própria autora.

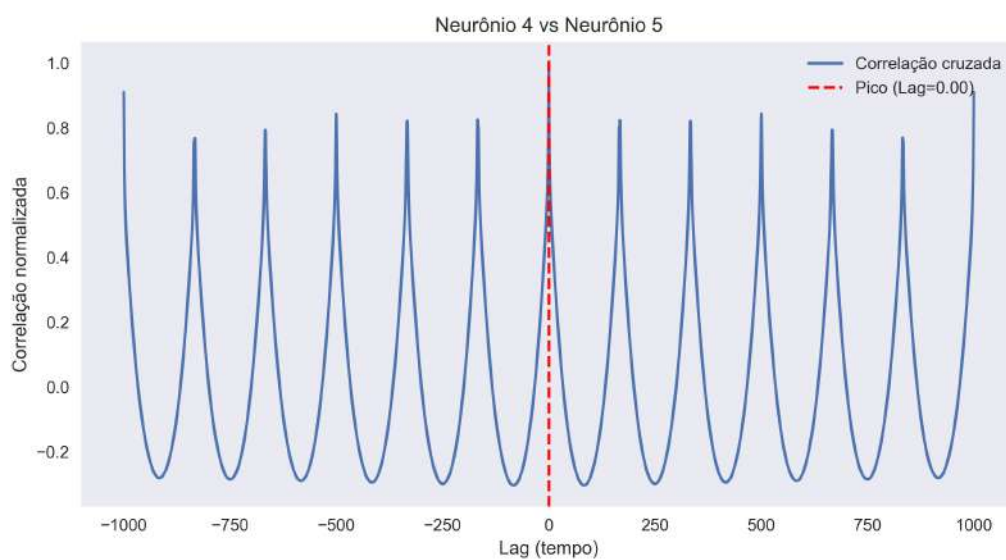
Figura 96 – Correlação cruzada entre neurônios 3 e 4



Fonte: elaborado pela própria autora.

A análise da correlação cruzada entre os sinais dos neurônios revelou uma forte coerência temporal entre diversos pares da rede, sob acoplamento unidirecional. Conforme apresentado nas Figuras 95 a 97, os pares de neurônios apresentam picos de correlação normalizada próximos de 1, sem

Figura 97 – Correlação cruzada entre neurônios 4 e 5



Fonte: elaborado pela própria autora.

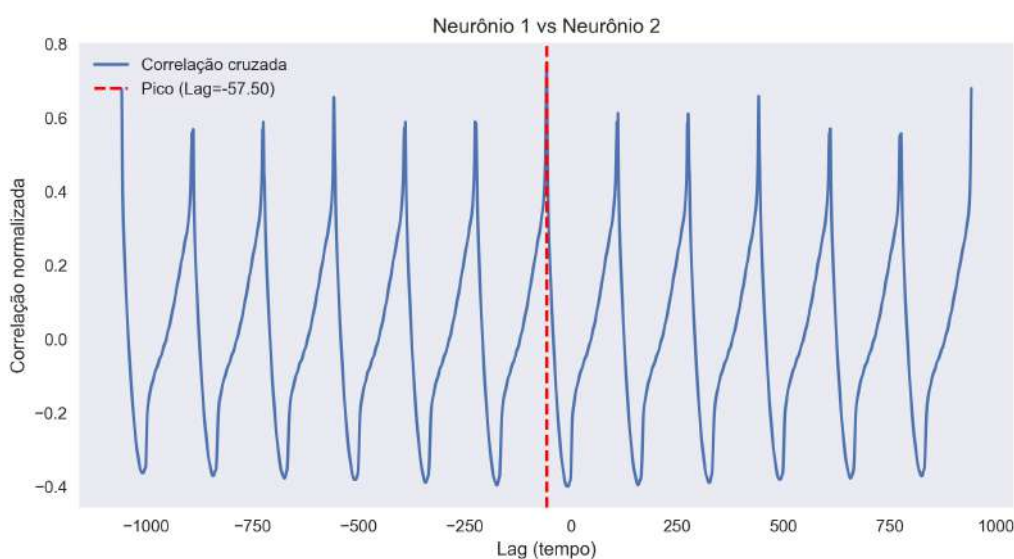
defasagens perceptíveis. Isso indica que esses neurônios disparam de forma altamente sincronizada quando o acoplamento é elétrico (linear).

6.2.2 Acoplamento químico $g_c = 1.0$, sem ruído - 1D

Esta subseção apresenta a análise da dinâmica de cinco neurônios acoplados quimicamente de forma unidirecional, com intensidade $g_c = 1.0$ e ausência de ruído ($\beta = 0$). São examinados gráficos de correlação cruzada e diagramas de fase, com foco na propagação da atividade ao longo da rede.

Os resultados evidenciam uma sincronização parcial com defasagem crescente entre os neurônios, compatível com a topologia linear e a direção do acoplamento. Observa-se também a formação de padrões de fase coerentes entre pares diretamente conectados e maior dispersão entre os mais distantes, refletindo a dinâmica sequencial imposta pela arquitetura da rede.

Figura 98 – Correlação cruzada entre neurônio 1 e o 2

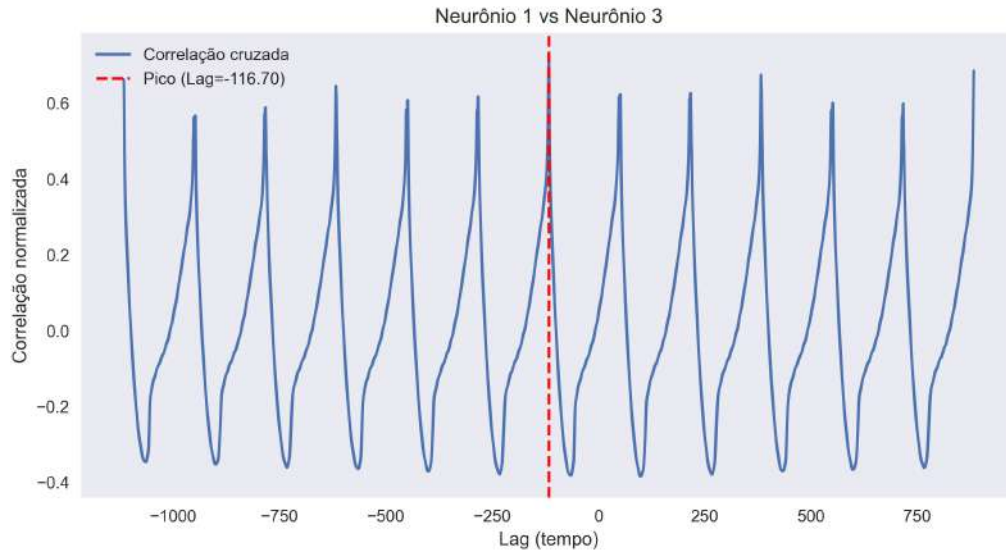


Fonte: elaborado pela própria autora.

Nota-se que a posição do pico da função de correlação cruzada se desloca sistematicamente para defasagens maiores à medida que aumenta a distância topológica entre os neurônios em relação ao neurônio 1. O neurônio 2, que recebe diretamente influência química do neurônio 1, apresenta o pico mais próximo do tempo zero, em aproximadamente $-57,5$ unidades de tempo. Para os neurônios 3, 4 e 5, que não possuem conexão direta com o neurônio 1, mas são alcançados por meio de conexões sucessivas ao longo da cadeia unidirecional, os picos ocorrem aproximadamente em -117 , -176 e -235 unidades de tempo, respectivamente. Esses valores indicam que a atividade do neurônio 1 antecipa de forma crescente a dos demais neurônios, evidenciando uma propagação progressiva do sinal ao longo da rede.

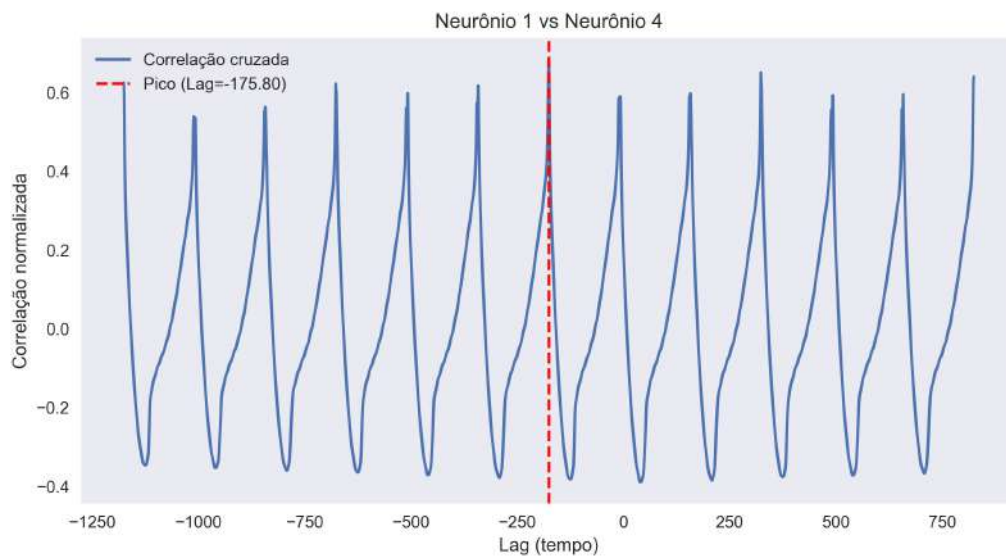
Esse comportamento é típico de redes com acoplamento excitatório unidirecional, como é o caso dos sinapses químicas modeladas aqui, e caracteriza um regime de sincronização com defasagem de fase (*phase lag synchronization*). Nesse regime, os elementos da rede não oscilam de maneira

Figura 99 – Correlação cruzada entre neurônio 1 e o 3



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 100 – Correlação cruzada entre neurônio 1 e o 4

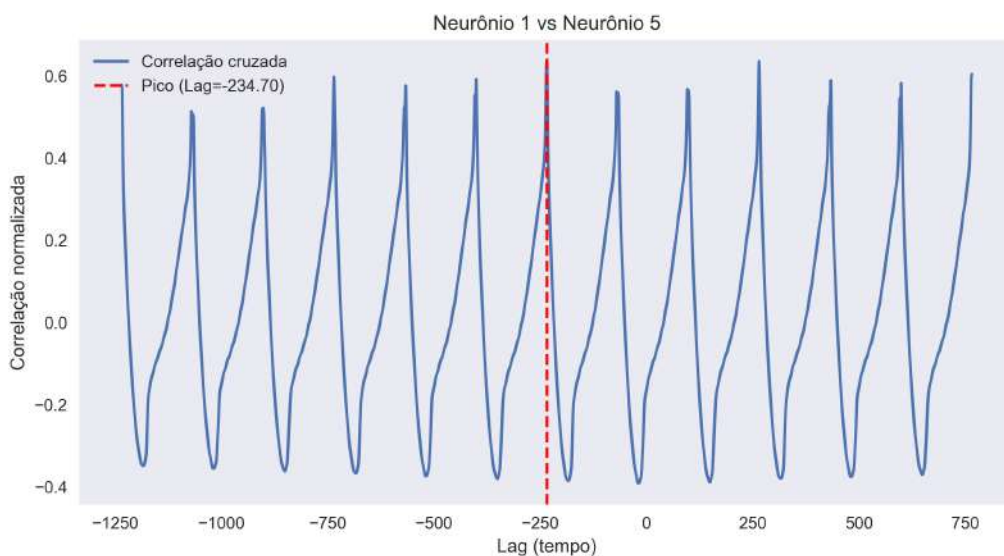


Fonte: elaborado pela própria autora.

simultânea, mas mantêm uma defasagem relativa estável, configurando um arranjo coerente e ordenado de fases entre os neurônios, Pikovsky, Rosenblum e Kurths (2003), Breakspear, Heitmann e Daffertshofer (2010).

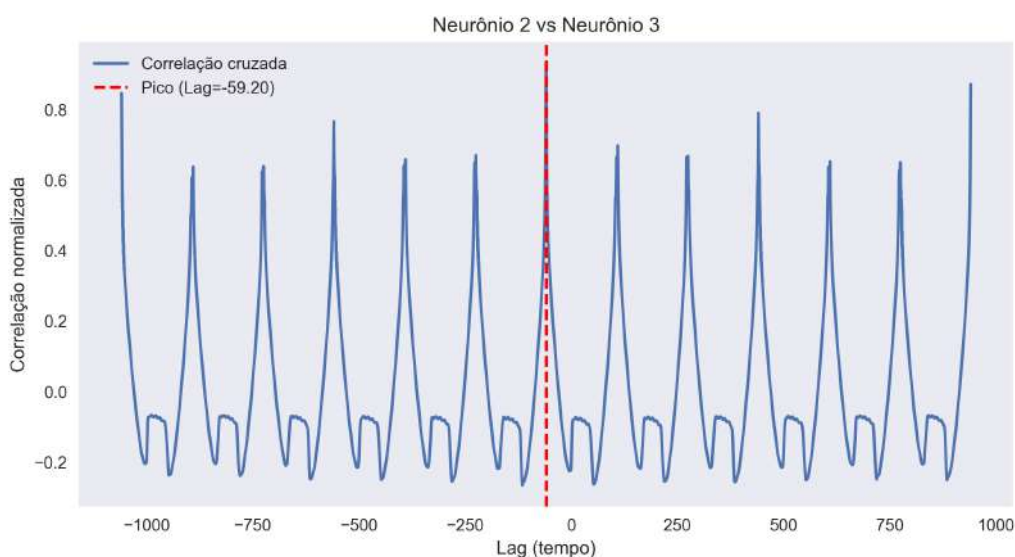
A defasagem sistemática observada pode ser atribuída tanto ao tempo de condução da informação através da cadeia sináptica quanto à própria arquitetura unidirecional da rede. À medida que o sinal passa de um neurônio para o seguinte, acumula-se uma defasagem que se manifesta claramente na função de correlação cruzada. Esse padrão é compatível com resultados da literatura sobre redes neuronais acopladas, nas quais a força e a direção do acoplamento modulam a coerência e a ordem temporal das oscilações coletivas, mesmo na presença de ruído, Buzsáki e Draguhn (2004).

Figura 101 – Correlação cruzada entre neurônio 1 e o 5



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 102 – Correlação cruzada entre neurônios 2 e 3

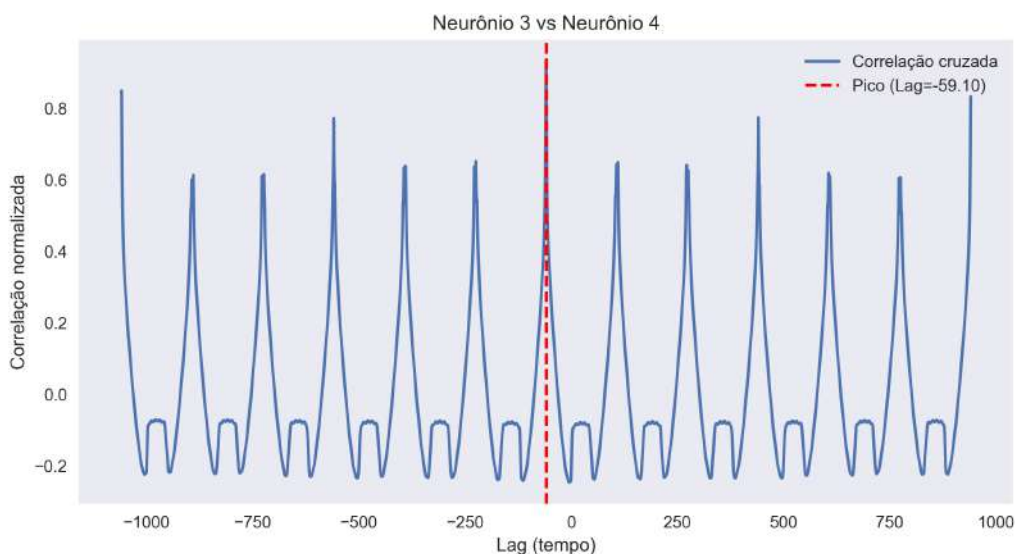


Fonte: elaborado pela própria autora.

No gráfico referente à correlação entre o neurônio 1 e o neurônio 2, observa-se um pico máximo de correlação em um *lag* negativo (aproximadamente -59), o que indica que a atividade do neurônio 1 antecipa sistematicamente a do neurônio 2. Esse comportamento é compatível com a presença de acoplamento químico unidirecional da forma $1 \rightarrow 2$, no qual o neurônio pré-sináptico influencia diretamente o pós-sináptico, mas não o contrário. Tal padrão é característico de redes com conexões direcionais, nas quais a assimetria estrutural impõe uma ordem causal à dinâmica, Bocalleti *et al.* (2006).

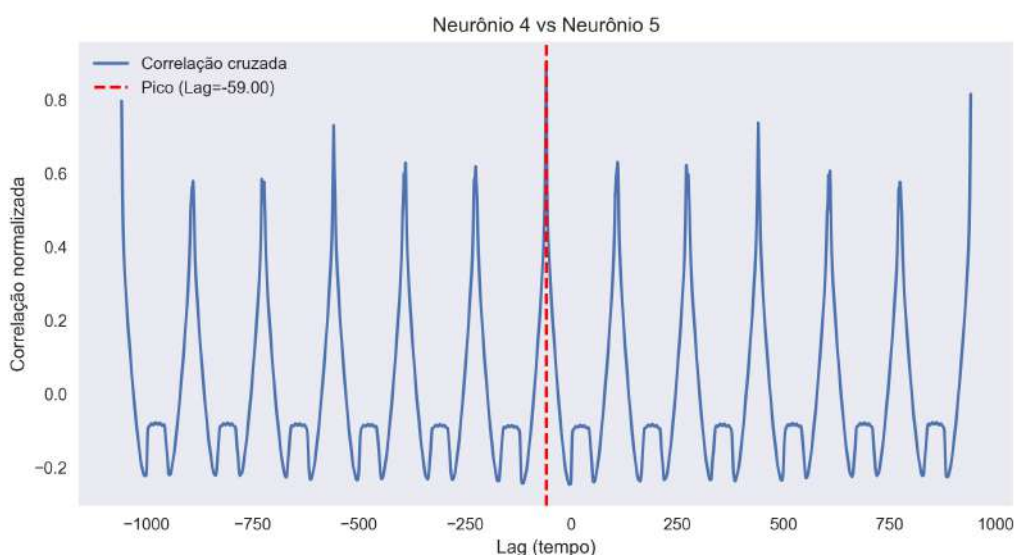
Da mesma forma, nos pares subsequentes — neurônio 2 vs. neurônio 3, neurônio 3 vs. neurônio 4, e neurônio 4 vs. neurônio 5 — a posição do pico de correlação permanece deslocada para *lags*

Figura 103 – Correlação cruzada entre neurônios 3 e 4



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 104 – Correlação cruzada entre neurônios 4 e 5



Fonte: elaborado pela própria autora.

negativos, com valores em torno de -59 , refletindo o tempo médio de propagação da atividade sináptica entre os elementos consecutivos da rede. Esse padrão de defasagem constante reforça a interpretação de uma propagação em cadeia, na qual a dinâmica oscilatória se transmite de forma sequencial e ordenada a partir do neurônio 1 até o neurônio 5. A organização da rede, aliada à natureza unidirecional do acoplamento químico, favorece a formação de ondas viajantes de ativação neuronal, um fenômeno comum em sistemas excitatórios com topologia linear, Rulkov (2002).

Além disso, o fato de os picos de correlação se repetirem de maneira regular ao longo do tempo indica que a rede mantém um regime dinâmico periódico e estável. Esse comportamento é típico de sistemas oscilatórios acoplados que alcançam sincronização parcial com defasagem constante, isto

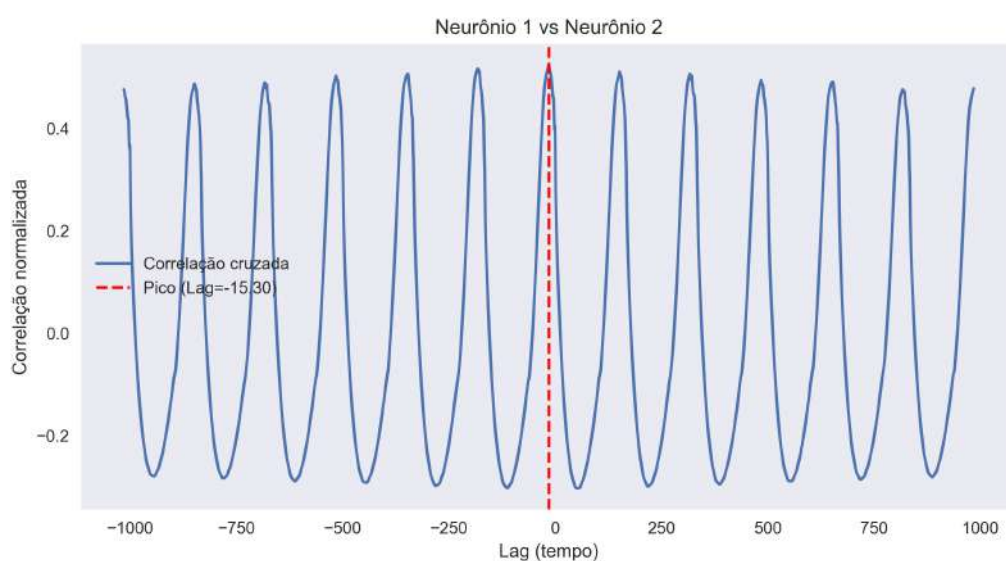
é, os neurônios oscilam com a mesma frequência, mas com deslocamentos de fase fixos entre si, conforme amplamente discutido na literatura, Izhikevich (2003).

6.3 TOPOLOGIA BIDIMENSIONAL COM MÚLTIPLOS NEURÔNIOS

6.3.1 Acoplamento elétrico $g_e = 1.0$, sem ruído - 2D

Nesta seção, são apresentados e discutidos os resultados obtidos para a rede bidimensional composta por múltiplos neurônios, acoplados eletricamente com intensidade $g_e = 1.0$, na ausência de ruído. O objetivo desta análise é investigar como a estrutura bidimensional, caracterizada pela presença de conexões unidirecionais e pela existência de um *loop* local entre determinados neurônios, influencia a propagação da atividade neuronal e a formação de padrões de sincronização.

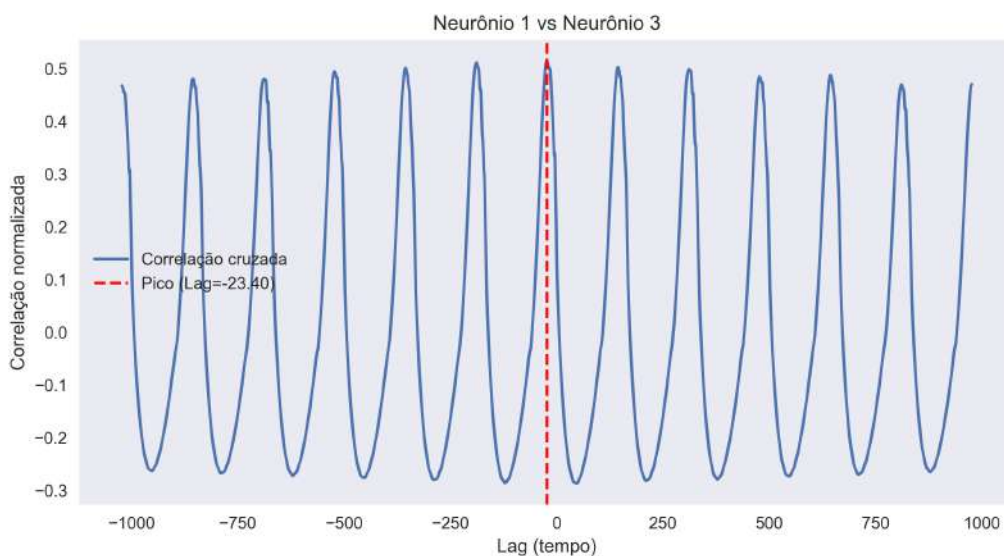
Figura 105 – Correlação cruzada entre neurônio 1 e o 2



Fonte: elaborado pela própria autora.

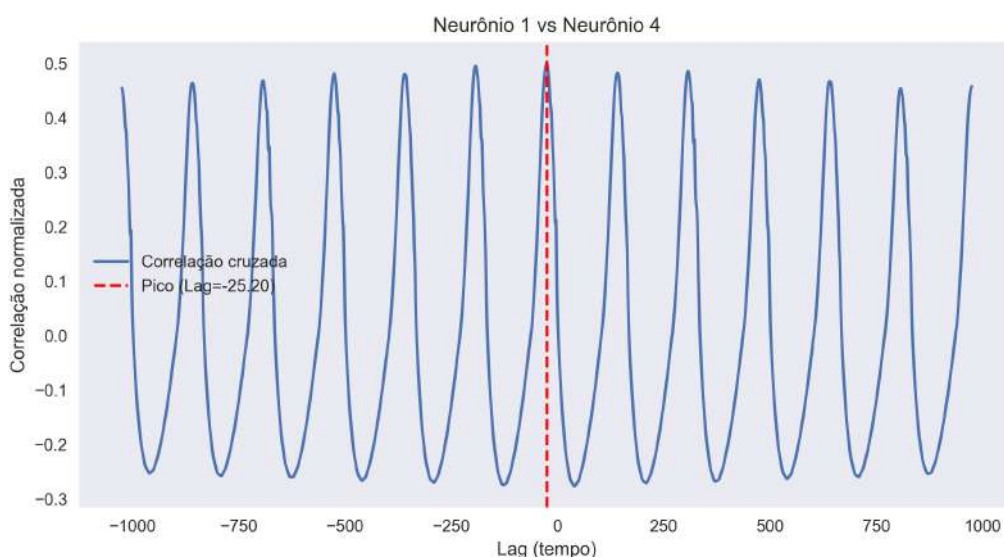
Observa-se que o neurônio 1 apresenta correlações com os neurônios 2, 3, 4 e 5 com picos localizados em defasagens negativas crescentes, o que indica uma propagação sequencial da atividade. A defasagem entre os neurônios 1 e 2 é de aproximadamente $-15,3$, indicando que o neurônio 1 antecipa dinamicamente o neurônio 2. As defasagens observadas com os neurônios 3 e 4 ($-23,4$ e $-25,2$, respectivamente) reforçam essa propagação, sugerindo que a atividade do neurônio 1 se propaga pelo loop formado por esses três neurônios. O neurônio 5, que apresenta a maior defasagem ($-31,2$), provavelmente se encontra em uma posição mais distal na topologia da rede. O fato de que a defasagem aumenta progressivamente de 2 a 5 sugere que a influência do neurônio 1 percorre o circuito de maneira hierárquica, compatível com uma arquitetura de acoplamento unidirecional. Além disso, o loop entre os neurônios 2, 3 e 4 pode contribuir para manter e redistribuir a atividade propagada a partir do neurônio 1, funcionando como uma subestrutura ressonante dentro da rede. Tais padrões são característicos de redes dirigidas com caminhos preferenciais de propagação de

Figura 106 – Correlação cruzada entre neurônio 1 e o 3



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 107 – Correlação cruzada entre neurônio 1 e o 4



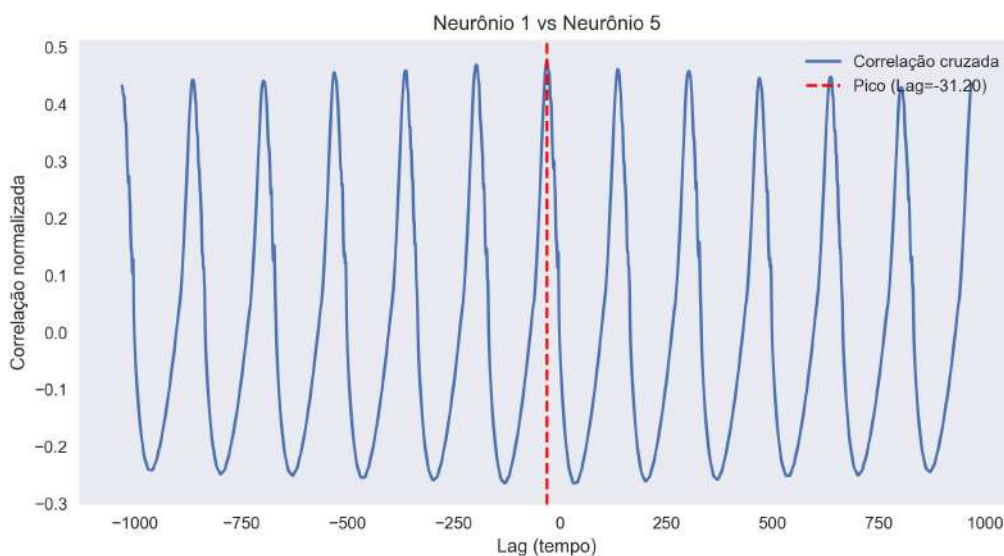
Fonte: elaborado pela própria autora.

signal e reforçam o papel do neurônio 1 como iniciador da dinâmica coletiva observada.

Os resultados das correlações cruzadas entre os pares de neurônios revelam padrões distintos de sincronização, compatíveis com o tipo de acoplamento utilizado na rede. Considerou-se um acoplamento elétrico unidirecional, o que implica que a influência de um neurônio sobre outro ocorre em uma única direção, e que os neurônios 2, 3 e 4 formam um loop de realimentação.

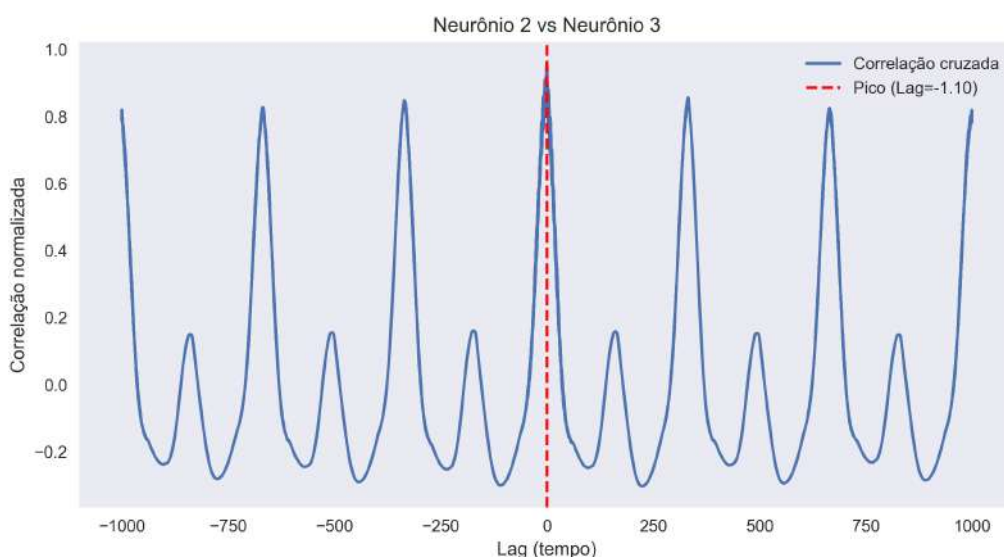
A análise entre os neurônios 1 e 2 (Figura 105) apresenta uma correlação cruzada com um pico deslocado em relação ao tempo zero ($lag \approx -15,3$), indicando uma defasagem temporal entre os sinais. Isso sugere que o neurônio 1 influencia o neurônio 2 com um pequeno atraso, compatível com a direção do acoplamento unidirecional.

Figura 108 – Correlação cruzada entre neurônio 1 e o 5



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 109 – Correlação cruzada entre neurônios 2 e 3



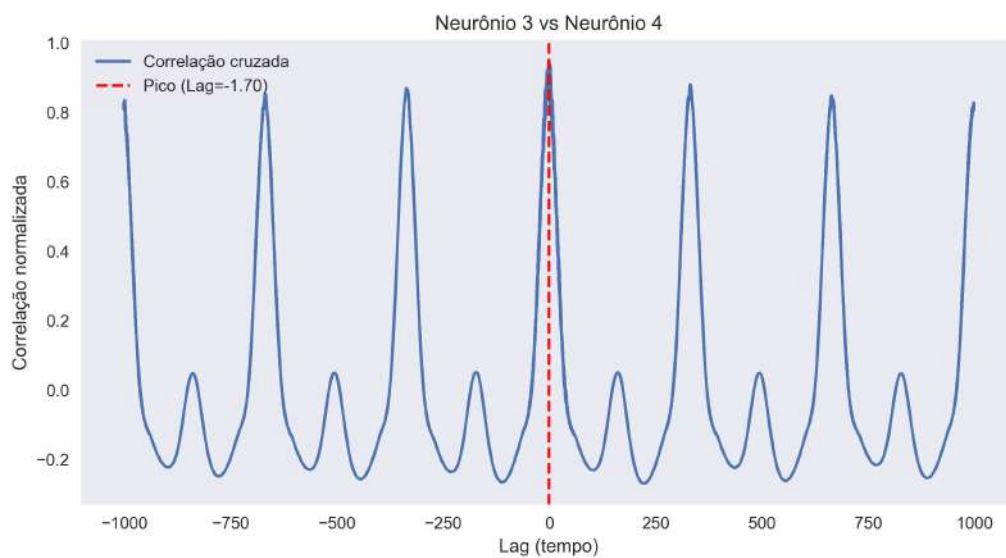
Fonte: elaborado pela própria autora.

Na sequência do loop, a correlação entre os neurônios 2 e 3 (Figura 109) exibe um pico de correlação pronunciado próximo de $lag = -1,1$, o que indica uma defasagem temporal curta e uma forte sincronização entre esses dois neurônios. De maneira semelhante, o gráfico de correlação cruzada entre os neurônios 3 e 4 (Figura 110) mostra um pico também deslocado ($lag = -1,7$), refletindo a continuidade do acoplamento no sentido $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$.

Já a correlação entre os neurônios 4 e 5 (Figura 111) revela um pico de correlação em torno de $lag = -0,9$, indicando que o neurônio 4 influencia o neurônio 5 com um pequeno atraso. Esse resultado é coerente com a propagação unidirecional do sinal elétrico ao longo da cadeia neuronal.

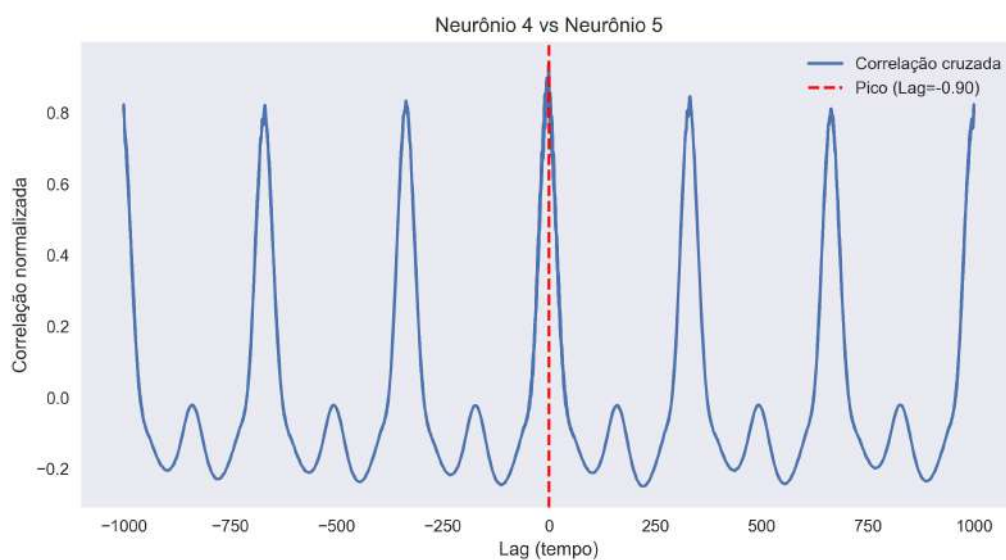
Em geral, os valores negativos de lag nos picos de correlação sugerem que o neurônio listado

Figura 110 – Correlação cruzada entre neurônios 3 e 4



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 111 – Correlação cruzada entre neurônios 4 e 5



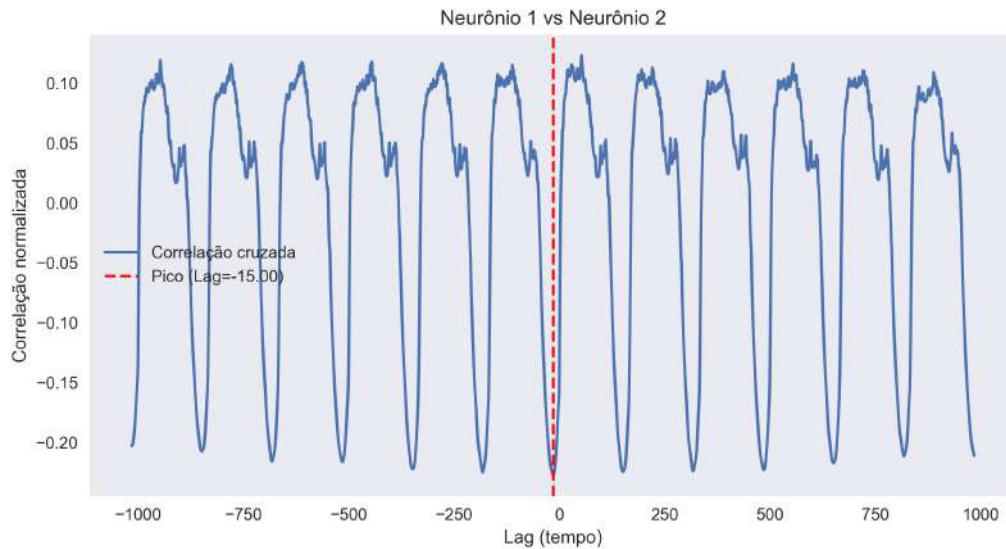
Fonte: elaborado pela própria autora.

primeiro em cada par lidera dinamicamente o segundo. Além disso, os altos valores de correlação nos picos indicam que, apesar da defasagem temporal, há uma forte coerência oscilatória entre os neurônios acoplados.

6.3.2 Acoplamento químico $g_c = 1.0$, sem ruído - 2D

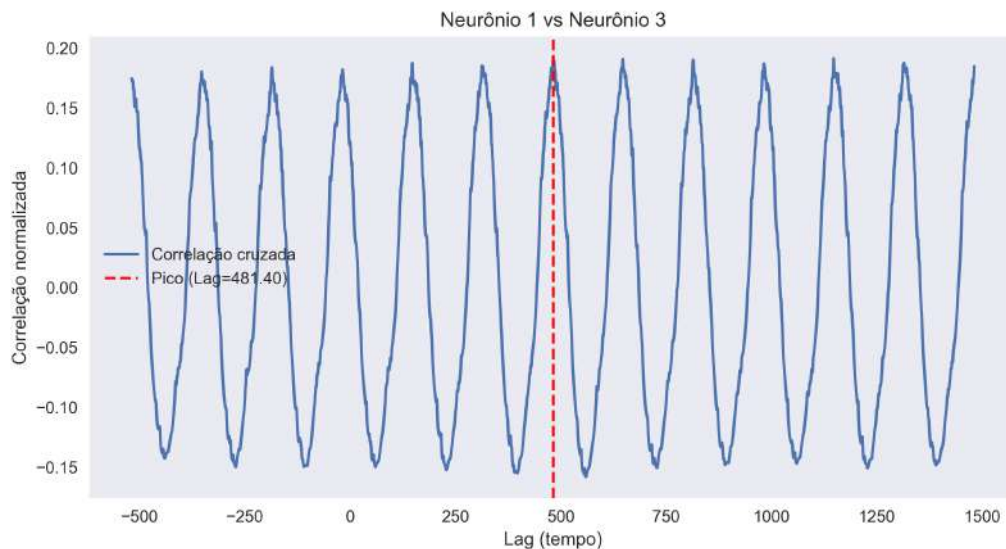
Nesta subseção, são apresentados os resultados obtidos para a rede bidimensional com acoplamento químico unidirecional, com intensidade $g_c = 1.0$, na ausência de ruído. O foco da análise está na verificação dos padrões de sincronização entre os neurônios, considerando a influência da topologia da rede, que inclui a presença de um *loop* local entre neurônios intermediários.

Figura 112 – Correlação cruzada entre neurônio 1 e o 2



Fonte: elaborado pela própria autora.

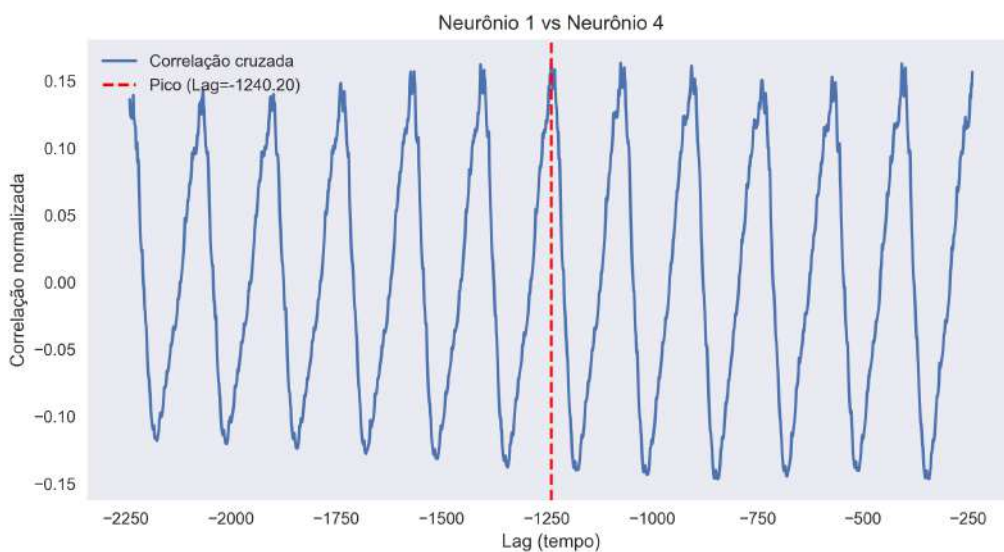
Figura 113 – Correlação cruzada entre neurônio 1 e o 3



Fonte: elaborado pela própria autora.

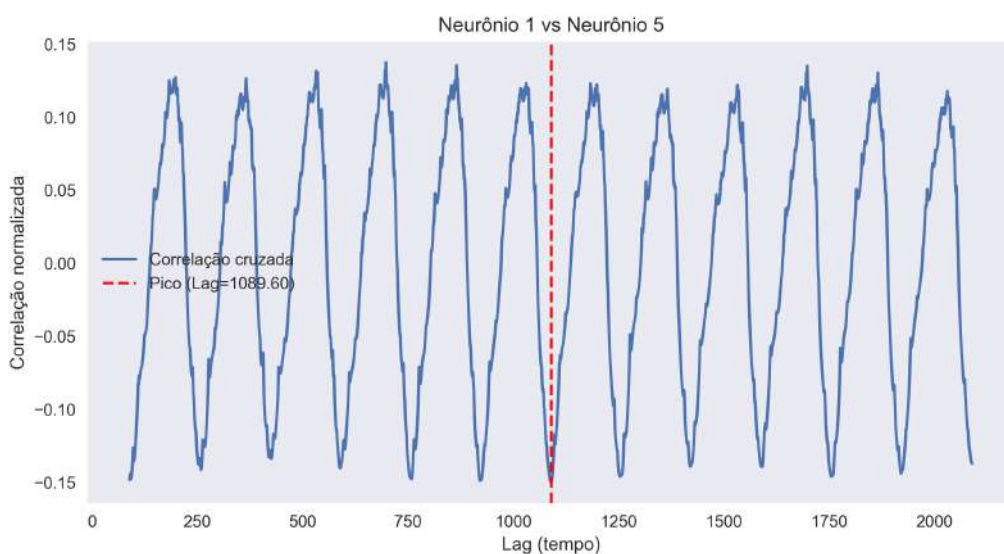
Para o par formado pelos neurônios 1 e 2, observou-se um pico de correlação cruzada com defasagem de aproximadamente -15 unidades de tempo, o que indica uma sincronização quase

Figura 114 – Correlação cruzada entre neurônio 1 e o 4



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 115 – Correlação cruzada entre neurônio 1 e o 5



Fonte: elaborado pela própria autora.

instantânea entre esses neurônios. Esse comportamento está de acordo com a topologia imposta, dado o acoplamento direto de 1 para 2.

Já para o par 1 e 3, a defasagem positiva de aproximadamente $+481,4$ sugere que o neurônio 3 responde com um atraso considerável em relação ao neurônio 1. Esse comportamento pode ser interpretado como uma consequência de um acoplamento indireto, mediado pelo neurônio 2, ou seja, uma possível cadeia de influência do tipo $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$.

No caso do neurônio 4, a defasagem foi de aproximadamente $-1240,2$, indicando que sua atividade precede significativamente a do neurônio 1. Esse resultado não é compatível com um acoplamento direto de 1 para 4, mas pode ser explicado pela presença de um circuito fechado entre

os neurônios 2, 3 e 4, conforme previamente identificado. Esse loop pode proporcionar uma retroalimentação indireta que eventualmente influencia o neurônio 1, justificando a defasagem negativa observada.

Por fim, a correlação cruzada entre os neurônios 1 e 5 apresentou um pico com defasagem de aproximadamente +1089,6, sugerindo que o neurônio 5 é influenciado pelo neurônio 1 com um atraso ainda maior. Isso está de acordo com a hipótese de que o neurônio 5 se encontra na extremidade de uma cadeia de transmissão que passa por múltiplos neurônios intermediários.

Dessa forma, os atrasos temporais observados nas correlações cruzadas reforçam a hipótese de uma rede com topologia do tipo

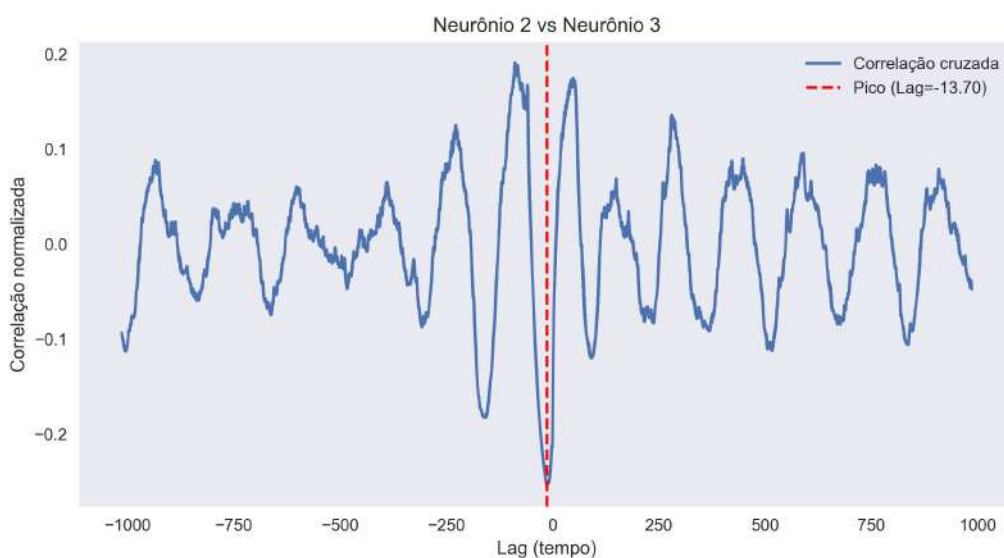
$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5,$$

com um loop de realimentação envolvendo os neurônios 2, 3 e 4:

$$2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2.$$

Essa estrutura permite interpretar coerentemente os diferentes padrões de defasagem, tanto positivos quanto negativos, observados nas correlações entre os neurônios.

Figura 116 – Correlação cruzada entre neurônios 2 e 3

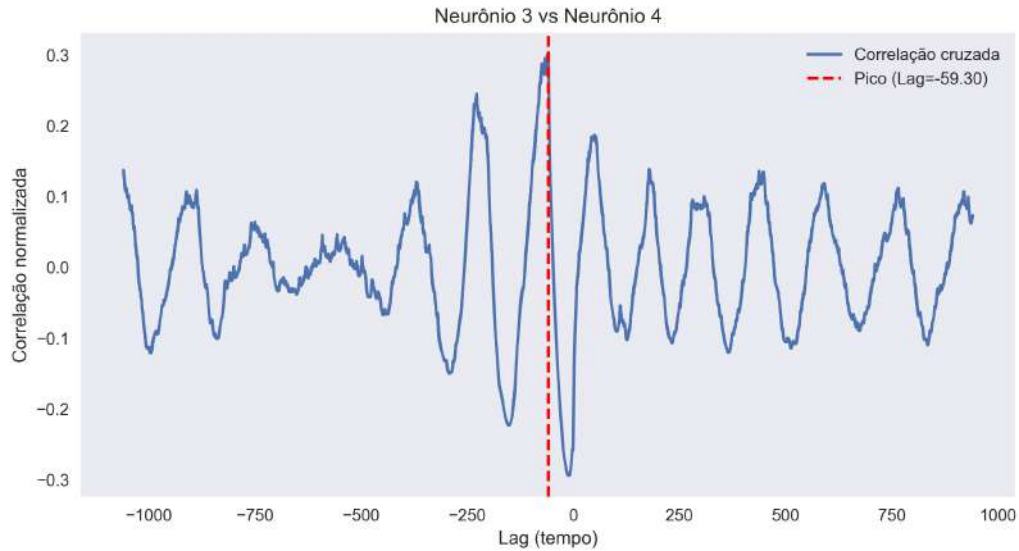


Fonte: elaborado pela própria autora.

A Figura 112 apresenta a correlação cruzada entre os neurônios 1 e 2, onde se observa um pico principal com *lag* de aproximadamente -15 unidades de tempo. Isso indica que o neurônio 2 tende a responder com um pequeno atraso em relação ao neurônio 1, o que é coerente com a topologia da rede, na qual o acoplamento é unidirecional do neurônio 1 para o neurônio 2.

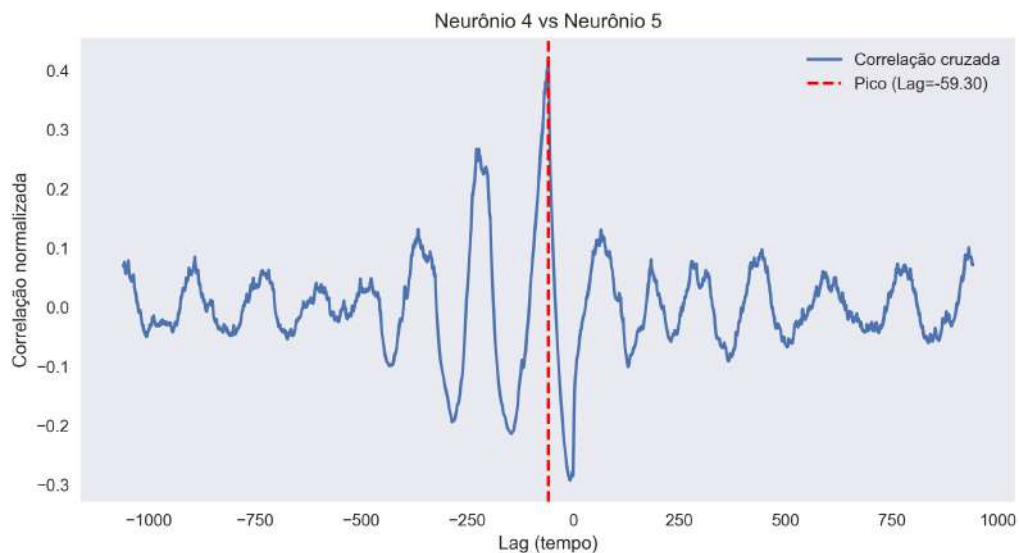
A seguir, na Figura 116, é apresentada a correlação cruzada entre os neurônios 2 e 3. O pico máximo ocorre em -13,7 unidades de tempo, sugerindo novamente uma defasagem temporal pequena,

Figura 117 – Correlação cruzada entre neurônios 3 e 4



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 118 – Correlação cruzada entre neurônios 4 e 5



Fonte: elaborado pela própria autora.

com o neurônio 3 oscilando ligeiramente após o neurônio 2. Esse padrão se mantém na Figura 117, que mostra a correlação entre os neurônios 3 e 4, cujo pico também ocorre com *lag* negativo de $-59,3$, indicando uma defasagem mais acentuada.

Por fim, a Figura 118 mostra o comportamento entre os neurônios 4 e 5, com um pico localizado em $-59,3$, reforçando a tendência de propagação unidirecional do sinal ao longo da cadeia de neurônios ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$). A presença de picos de correlação cruzada em *lags* negativos em todas as conexões diretas da cadeia confirma que a atividade dos neurônios posteriores está temporalmente atrasada em relação aos anteriores, consistente com a direção do acoplamento na rede.

6.4 RELAÇÕES DE FASE

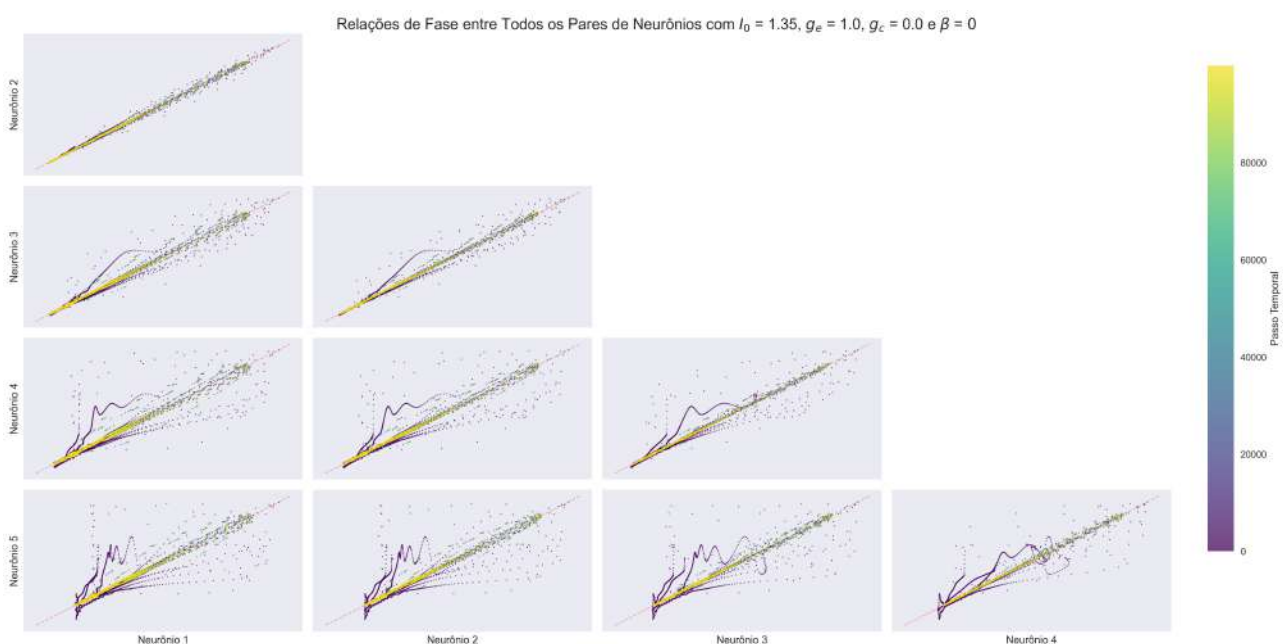
As Figuras 119, 120, 121 e 122 apresentam as relações de fase entre todos os pares de neurônios da rede unidimensional com acoplamento elétrico unidirecional ($g_e = 1,0$), na ausência de ruído ($\beta = 0$). Cada subgráfico mostra a fase de um neurônio em relação à de outro, onde o eixo horizontal corresponde ao neurônio de menor índice e o vertical ao de maior índice. A linha tracejada indica a linha de identidade ($\phi_i = \phi_j$), que representa sincronização perfeita entre os sinais.

As cores dos pontos representam a evolução temporal da relação de fase, com tons roxos nos instantes iniciais e tons amarelos nos instantes finais da simulação, conforme indicado pela barra de cor. Essa codificação revela a dinâmica de formação da sincronização ao longo do tempo.

6.4.1 Acoplamento elétrico $g_e = 1,0$, sem ruído - 1D

Nesta configuração unidimensional com acoplamento elétrico unidirecional e ausência de ruído, Figura 119 foi possível observar uma forte sincronização entre os neurônios ao longo de toda a cadeia. O neurônio 1 atua como oscilador mestre, influenciando diretamente os demais neurônios da rede. As análises de correlação cruzada mostraram picos sempre em torno de *lag* zero, indicando uma coerência temporal praticamente imediata entre os neurônios. A relação de fase permaneceu altamente alinhada, com rápida estabilização da dinâmica oscilatória, o que evidencia a eficiência deste tipo de acoplamento para promover sincronização robusta e rápida ao longo de toda a cadeia.

Figura 119 – Relação de fases entre pares de neurônios - topologia unidimensional, $g_e = 1,0$, sem ruído.



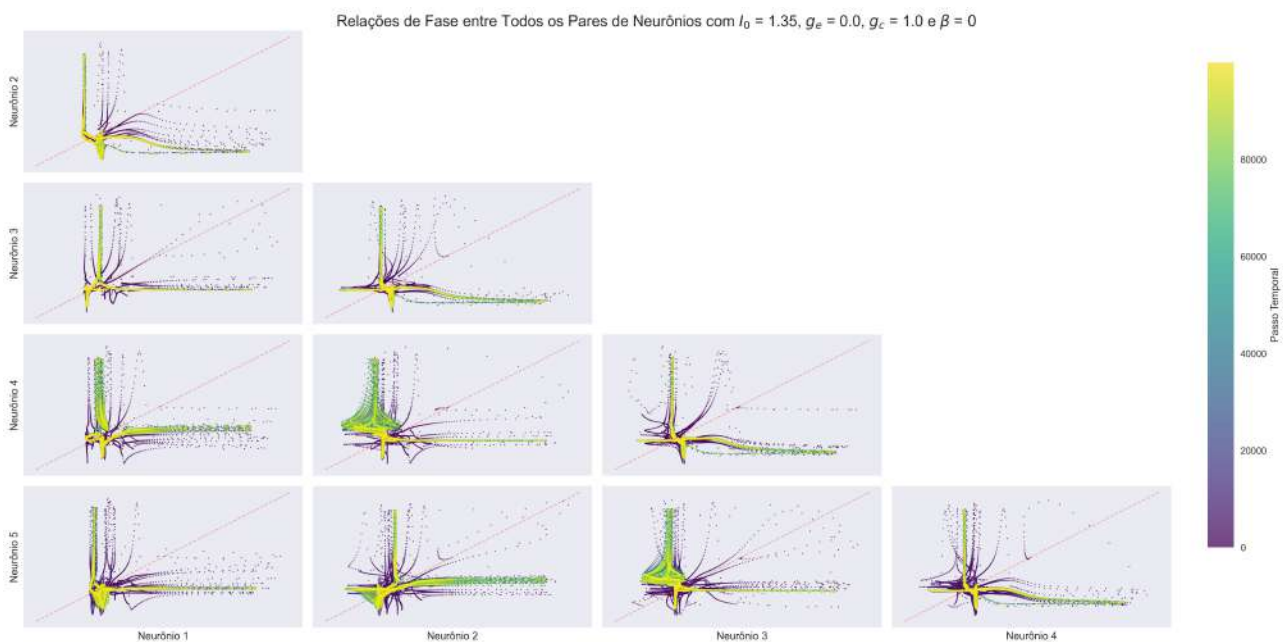
Fonte: elaborado pela própria autora.

Como aspecto relevante, destaca-se que a sincronização foi rápida e robusta, propagando-se sem perdas por toda a cadeia.

6.4.2 Acoplamento químico $g_c = 1.0$, sem ruído - 1D

Na topologia uniidimensional com acoplamento químico de intensidade $g_c = 1.0$ e sem ruído, Figura 120, observou-se uma sincronização sequencial, reforçada por estruturas locais de realimentação. As relações de fase apresentaram defasagens crescentes ao longo da cadeia, com pares diretamente conectados exibindo maior coerência e sincronização mais robusta. Já os pares mais distantes apresentaram defasagens acumuladas ao longo do tempo, refletindo a natureza unidirecional da propagação do sinal na rede. A sincronização, apesar de mantida, não foi tão imediata nem tão estável quanto no caso do acoplamento elétrico.

Figura 120 – Relação de fases entre pares de neurônios - topologia unidimensional, $g_c = 1.0$, sem ruído.



Fonte: elaborado pela própria autora.

O aspecto relevante observado foi a sincronização sequencial, reforçada pela estrutura de *loop* local da rede.

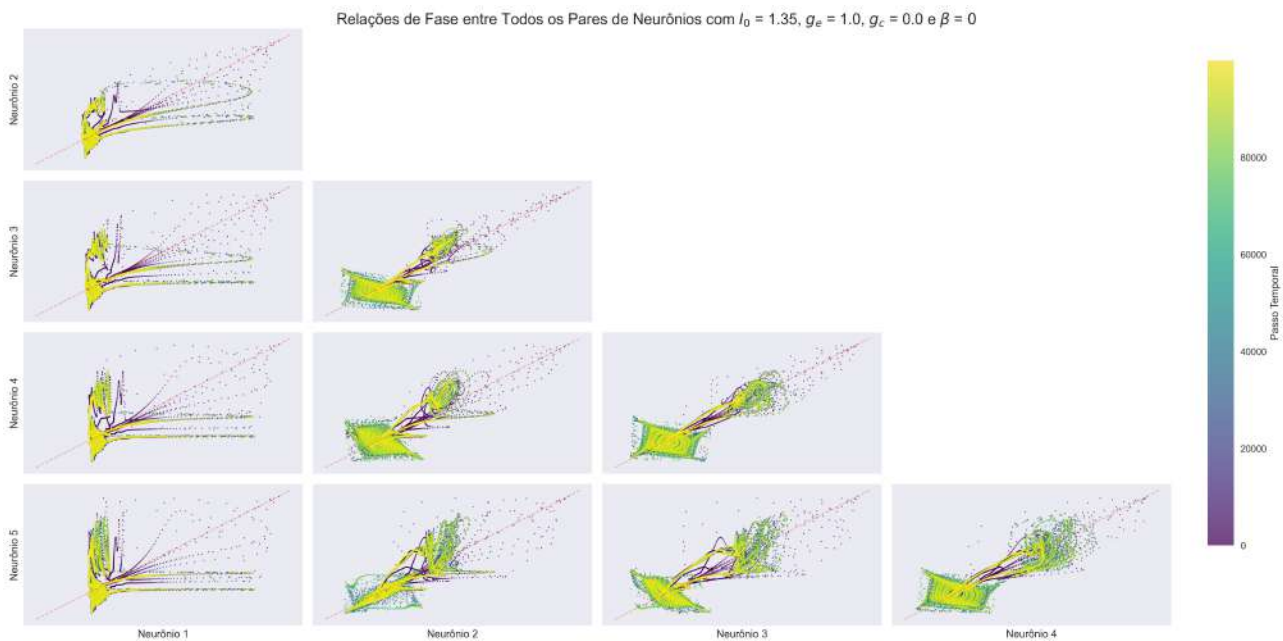
6.4.3 Acoplamento elétrico $g_e = 1,0$, sem ruído – 2D

Nesta configuração, a rede neuronal apresenta acoplamento elétrico unidirecional com intensidade $g_e = 1,0$, disposta em uma topologia em *loop* fechado, sem presença de ruído ($\beta = 0$). A relação de fase entre todos os pares de neurônios, apresentada na Figura 121, revela uma sincronização robusta e simétrica entre os neurônios ao longo do tempo.

Diferentemente da topologia linear, onde o neurônio 1 exerce papel de oscilador mestre, a estrutura em *loop* permite que todos os neurônios se influenciem mutuamente, promovendo uma sincronização mais distribuída. Isso se reflete na figura pela maior uniformidade das fases entre pares, sem a predominância de uma direção clara de propagação da oscilação.

A trajetória das fases (codificadas pela escala temporal de cores) mostra uma convergência rápida para a linha de identidade ($\phi_i = \phi_j$), indicando que os neurônios alcançam sincronização praticamente perfeita de forma estável. A circularidade da topologia parece reforçar a coesão dinâmica do grupo, mesmo na ausência de ruído e com acoplamento exclusivamente elétrico.

Figura 121 – Relação de fases entre pares de neurônios – topologia em loop, $g_e = 1,0$, sem ruído.



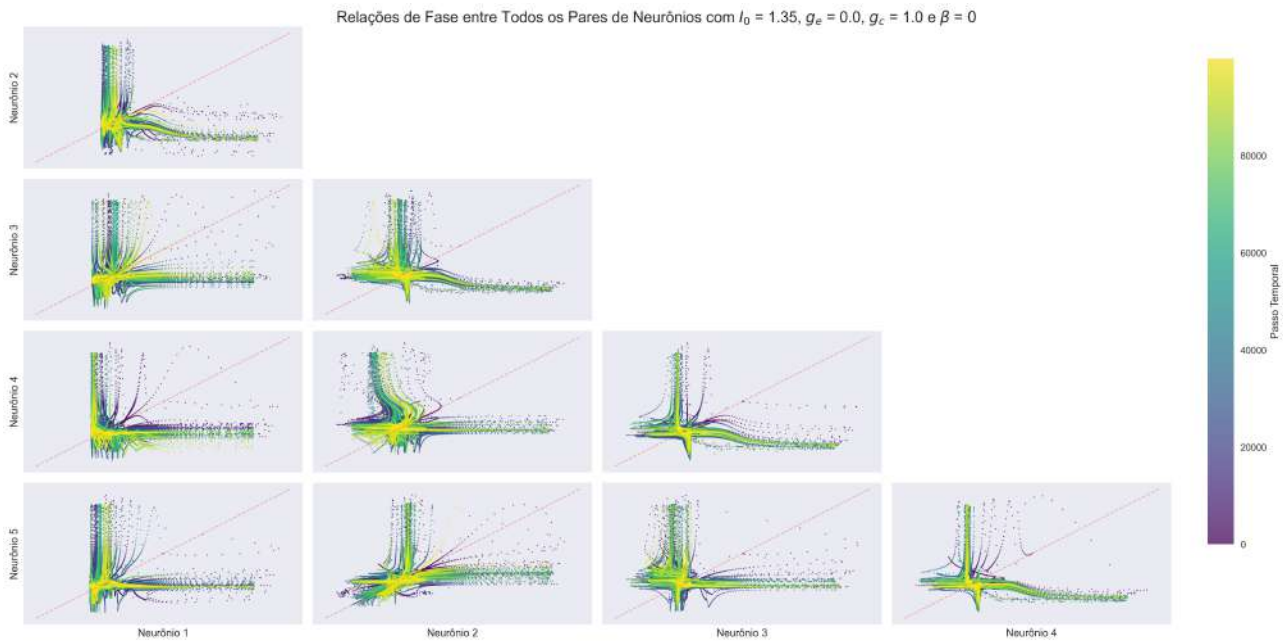
Fonte: elaborado pela própria autora.

Esse comportamento reforça o papel do acoplamento elétrico como mecanismo eficiente de sincronização, especialmente quando associado a uma topologia que permite retroalimentação global.

6.4.4 Acoplamento químico $g_c = 1.0$, sem ruído - 2D

Esta subseção apresenta a análise da dinâmica de cinco neurônios acoplados quimicamente de forma bidimensional, com a formação de um *loop* local entre os neurônios 2, 3 e 4. com intensidade $g_c = 1.0$, na ausência de ruído ($\beta = 0$).

Figura 122 – Relação de fases entre pares de neurônios – topologia em loop, $g_c = 1.0$, sem ruído.



Fonte: elaborado pela própria autora.

Nota-se que pares formados entre neurônios adjacentes na cadeia apresentam menores diferenças de fase, especialmente no loop (neurônios 2–3–4), sugerindo que a presença do loop local favorece a sincronização parcial dentro desse subgrupo. Já os pares mais distantes apresentam diferenças de fase mais acentuadas, o que pode indicar que o acoplamento químico não foi suficiente para sincronizar toda a rede globalmente.

6.4.5 Comparação entre os casos

Para sintetizar os principais resultados, o quadro 4 resume os efeitos das diferentes topologias e tipos de acoplamento sobre a sincronização da rede.

Quadro 4 – Comparação dos efeitos da topologia e tipo de acoplamento na sincronização da rede.

Topologia	Acoplamento	Sincronização	Defasagem
Unidimensional	Elétrico	Forte e imediata	Quase zero
Bidimensional	Elétrico	Sequencial, progressiva	Pequena e crescente
Unidimensional	Químico	Parcial, sequencial	Alta, crescente
Bidimensional	Químico	Parcial e irregular	Alta, variável

Fonte: elaborado pela própria autora.

A comparação entre as diferentes configurações evidencia que, na topologia unidimensional com acoplamento elétrico, a sincronização ocorre de forma imediata, robusta e uniforme ao longo da cadeia. Quando a mesma topologia (1D) é associada ao acoplamento elétrico em uma configuração bidimensional (2D), a sincronização ocorre de forma sequencial, com pequenos atrasos e reforço local por estruturas de *loop*. No caso do acoplamento químico unidimensional, observa-se uma sincronização parcial, com atrasos acumulativos e um padrão sequencial imposto pela direção das conexões. Finalmente, na topologia bidimensional com acoplamento químico, a sincronização é mais fraca, apresentando atrasos variáveis e uma dinâmica mais complexa devido à presença de *loops* internos e propagação indireta.

De forma geral, conclui-se que o acoplamento elétrico favorece uma sincronização mais eficiente e direta, enquanto o acoplamento químico tende a introduzir maiores defasagens, aumentando a complexidade e fragilidade da coerência global da rede, sobretudo em arquiteturas que incluem *loops*.

A seguir, no quadro 5 se mostram todas as comparações separadas por tipo de acoplamento e pares de neurônios. Os dados estão apresentados no texto tanto neste capítulo como no apêndice A.

Quadro 5 – Defasagens (lags) nas correlações cruzadas entre pares de neurônios, conforme topologia e tipo de acoplamento, para $\beta = 0$.

Topologia	Acoplamento	Par	Lag (unid. de tempo)	Observação
Unidimensional	Elétrico	1-2	≈ 0	Sincronização imediata
		1-3	≈ 0	Sem defasagem significativa
Unidimensional	Químico	1-2	-57,5	Defasagem crescente na cadeia
		1-3	-117	
		1-4	-176	
		1-5	-235	
Bidimensional	Elétrico	1-2	-15,3	Propagação sequencial
		1-3	-23,4	Influência via loop 2-3-4
		1-4	-25,2	
		1-5	-31,2	Neurônio mais distal
		2-3	-1,1	Sincronização no loop
		3-4	-1,7	
		4-5	-0,9	
Bidimensional	Químico	1-2	-15	Sincronização quase imediata
		1-3	+481,4	Influência indireta via 2
		1-4	-1240,2	Feedback do loop (2-3-4)
		1-5	+1089,6	Posição final da cadeia
		2-3	-13,7	Sincronização direta
		3-4	-59,3	
		4-5	-59,3	

Fonte: elaborado pela própria autora.

Quadro 6 – Efeitos qualitativos do ruído branco (valores de $\beta > 0$) em diferentes configurações de rede.

Topologia	Acoplamento	Intensidade do Ruído	Efeito Observado
Unidimensional	Elétrico ($g_e = 1, 0$)	Baixo	Rede filtra ruído (sincronização preservada)
Unidimensional	Elétrico ($g_e = 1, 0$)	Alto	Perda de coerência global
Unidimensional	Elétrico ($g_e = 0, 1$)	Baixo	Instabilidade local no neurônio 1
Unidimensional	Elétrico ($g_e = 0, 1$)	Alto	Estabilização passiva dos demais neurônios
Unidimensional	Químico ($g_c = 1, 0$)	Baixo	Coerência parcialmente preservada
Unidimensional	Químico ($g_c = 1, 0$)	Alto	Perturbação de neurônios intermediários (1 e 3)
Unidimensional	Químico ($g_c = 0, 1$)	Baixo	Rede permanece estável
Unidimensional	Químico ($g_c = 0, 1$)	Alto	Supressão de oscilações
Bidimensional com loop	Elétrico ($g_e = 1, 0$)	Baixo	Ruído não se propaga nos loops
Bidimensional com loop	Elétrico ($g_e = 1, 0$)	Alto	Oscilações irregulares nos neurônios distais
Bidimensional com loop	Químico ($g_c = 1, 0$)	Baixo	Sincronização mantida no loop central
Bidimensional com loop	Químico ($g_c = 1, 0$)	Alto	Sincronização degradada pela realimentação
Bidimensional com loop	Químico ($g_c = 0, 1$)	Alto	Ruído atua como estabilizador da dinâmica local

Fonte: elaborado pela própria autora.

6.5 RESUMO COMPARATIVO DAS RELAÇÕES DE FASE COM RUÍDO INTENSO

A análise das relações de fase nas diferentes topologias e tipos de acoplamento sob ruído intenso ($\beta = 1.0$) revelou padrões distintos de sincronização e coerência temporal. As redes unidimensionais com acoplamento elétrico preservaram uma propagação sequencial coerente da fase, com defasagens pequenas e crescimento progressivo ao longo da cadeia. No caso do acoplamento químico unidimensional, as defasagens foram mais acentuadas e aumentaram com a distância, embora o padrão sequencial tenha sido mantido.

Nas topologias bidimensionais, o acoplamento elétrico favoreceu a manutenção da coerência no *loop* local formado pelos neurônios 2, 3 e 4, mesmo com atrasos cumulativos. Já o acoplamento químico reforçou a formação de subestruturas funcionais dentro do *loop*, com forte sincronização interna e defasagens mais acentuadas nos neurônios externos, como o neurônio 5.

Em todas as situações, verificou-se que o ruído intenso compromete a coerência de fase com maior rapidez nas conexões indiretas ou mais distantes. No entanto, a topologia da rede e o tipo de acoplamento continuam sendo fatores determinantes para a preservação ou perda da sincronização.

Quadro 7 – Resumo das relações de fase sob ruído intenso ($\beta = 1, 0$).

Topologia	Acoplamento	Relação de Fase	Defasagem
Unidimensional	Elétrico	Sequencial e coerente	Pequena, crescente
Unidimensional	Químico	Sequencial e degradada	Alta, acumulativa
Bidimensional	Elétrico	Coerente no loop, degradada nas bordas	Pequena no loop, cresce fora dele
Bidimensional	Químico	Loop com forte sincronização, bordas dispersas	Alta, variável

Fonte: elaborado pela própria autora.

As imagens das correlações cruzadas utilizadas nesta análise, assim como as relações de fase, encontram-se reunidas no Apêndice A.

6.6 SÍNTESE FINAL DO CAPÍTULO 6

As redes unidimensionais mantêm melhor a coerência quando utilizam acoplamento elétrico, mesmo em presença de ruído intenso. Por outro lado, o acoplamento químico induz defasagens mais significativas e degrada a sincronização em cadeias longas. As topologias bidimensionais preservam a sincronia local, especialmente quando há acoplamento elétrico. Em todas as configurações, observa-se que neurônios mais distantes ou sem conexão direta perdem coerência mais rapidamente.

6.7 CONCLUSÃO INTEGRADA DAS RELAÇÕES DE FASE E TOPOLOGIAS DE REDE - CAPÍTULOS 5 E 6

As análises das relações de fase apresentadas nos capítulos anteriores permitiram observar padrões distintos de sincronização entre neurônios, fortemente influenciados pelo tipo de acoplamento, pela presença ou ausência de ruído e, principalmente, pela topologia da rede.

Na configuração **unidimensional com acoplamento elétrico** ($g_e = 1.0$ e $\beta = 0$), observou-se uma sincronização praticamente perfeita entre os neurônios. O neurônio 1 atua como oscilador mestre, propagando coerência oscilatória aos demais. As relações de fase revelaram alinhamento quase total à diagonal de identidade ($\phi_i = \phi_j$), indicando sincronia imediata e robusta. A linearidade da topologia e o acoplamento elétrico favorecem esse comportamento determinístico.

Quando analisada a rede unidimensional com acoplamento químico ($g_c = 1.0$ e $\beta = 0$), ainda que a sincronização esteja presente, notou-se uma defasagem crescente ao longo da cadeia. Os neurônios conectados diretamente apresentaram maior coerência temporal, enquanto os mais distantes acumularam atrasos de fase, refletindo a natureza difusiva do acoplamento químico e a propagação unidirecional do sinal.

A topologia bidimensional com loop local entre os neurônios 2, 3 e 4, sob acoplamento químico ($g_c = 1.0$, $\beta = 0$), apresentou um comportamento intermediário. Os neurônios que compõem o loop sincronizam-se entre si com boa precisão, enquanto os neurônios periféricos (1 e 5) mostraram maior variabilidade e defasagem em relação ao grupo central. Esse padrão confirma a ação estabilizadora de loops locais em redes complexas, promovendo sincronização parcial mesmo sem ruído.

A introdução do ruído branco gaussiano ($\beta > 0$) modifica substancialmente esses comportamentos. As análises quantitativas via SNR demonstraram que, em redes fortemente acopladas ($g_e = 1.0$ ou $g_c = 1.0$), o ruído é parcialmente contido em níveis baixos, mas se propaga completamente em altos níveis ($\beta \geq 1.0$), destruindo a coerência e a regularidade das oscilações.

Por outro lado, em topologias com acoplamento mais fraco ($g = 0.1$), observou-se um efeito estabilizador do ruído em certos regimes: ruídos moderados foram capazes de regular a atividade oscilatória, filtrando flutuações excessivas e promovendo sinais mais coerentes. Esse efeito foi particularmente evidente nas redes com topologia bidimensional e acoplamento químico fraco, em que o ruído suprimiu oscilações irregulares e estabilizou a dinâmica global.

Conclui-se que a sincronização neuronal não depende unicamente da força de acoplamento, mas é resultado de uma complexa interação entre a estrutura topológica, a natureza do acoplamento (elétrico/químico), e a intensidade de ruído. Em redes com loops locais, a retroalimentação oferece um mecanismo natural de estabilidade e filtragem de ruído, favorecendo sincronização localizada e resistência a perturbações externas. Assim, a presença de ciclos estruturais pode ser um elemento essencial para a robustez dinâmica de redes neurais reais.

Quadro 8 – Comparativo dos efeitos de topologia e tipo de acoplamento sobre a sincronização neuronal.

Topologia	Acoplamento	Efeito Observado
Unidimensional	Elétrico ($g_e = 1, 0$)	Sincronização perfeita e imediata ao longo da cadeia. Neurônio 1 lidera com coerência total.
Unidimensional	Químico ($g_c = 1, 0$)	Sincronização sequencial com defasagens crescentes. Coerência preservada, mas com atrasos acumulados.
Bidimensional (loop 2-3-4)	Químico ($g_c = 1, 0$)	Sem ruído: sincronização localizada no loop. Neurônios periféricos (1 e 5) apresentam maiores defasagens.
Bidimensional (loop 2-3-4)	Químico ($g_c = 1, 0$)	Com ruído moderado ($\beta = 10^{-2}$): neurônio 3 sensível ao ruído no loop. Sincronização parcial mantida.
Bidimensional (loop 2-3-4)	Químico ($g_c = 1, 0$)	Com ruído intenso ($\beta = 1, 0$): loop perde capacidade estabilizadora. Sincronização degradada, especialmente no neurônio 3 e periférico 5.
Bidimensional (loop 2-3-4)	Químico ($g_c = 0, 1$)	Sob ruído intenso: ruído atua como estabilizador. Oscilações irregulares suprimidas, promovendo maior regularidade.

Fonte: elaborado pela autora.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta dissertação investigou de forma detalhada a dinâmica de sincronização em redes neurais simples acopladas, sob diferentes regimes de conectividade, tipos de acoplamento (elétrico e químico) e intensidades de ruído branco gaussiano. Através de uma abordagem computacional foram analisadas redes com topologias unidimensionais e bidimensionais, incluindo a presença de *loops* locais, permitindo observar como diferentes estruturas influenciam a evolução temporal das oscilações neurais.

Os resultados demonstraram que o acoplamento elétrico, sobretudo em topologias lineares, favorece sincronização imediata e robusta ao longo da rede. Em contraste, o acoplamento químico, mesmo quando forte, promoveu sincronização mais gradual e sujeita a defasagens, principalmente em redes com propagação unidirecional. Contudo, a introdução de *loops* locais revelou-se um mecanismo eficaz para preservar a coerência de fase em porções específicas da rede, mesmo em contextos com ruído ou acoplamento fraco.

Outro ponto de destaque é o papel dual do ruído: embora esperado como elemento desestabilizador, em certos regimes ele atua como regulador dinâmico, filtrando oscilações desorganizadas e promovendo maior regularidade na rede. Essa constatação reforça a importância de considerar o ruído não apenas como uma perturbação, mas como parte intrínseca e funcional da dinâmica neural.

Do ponto de vista metodológico, esta pesquisa reafirma o valor das análises de fase e correlação como ferramentas para caracterizar a coerência temporal em sistemas oscilatórios. As simulações realizadas permitiram mapear não apenas os estados finais de sincronização, mas também sua evolução ao longo do tempo, fornecendo uma visão rica e detalhada do processo.

Em termos de contribuição, o trabalho oferece uma leitura sistêmica e comparativa dos fatores que promovem (ou inibem) a sincronização em redes neurais, podendo servir como base para o desenvolvimento de modelos mais realistas em neurociência computacional. A compreensão da influência da topologia, acoplamento e ruído sobre a dinâmica de redes neurais tem implicações que vão desde a modelagem de circuitos corticais até o projeto de redes artificiais inspiradas em princípios biológicos.

Como perspectivas futuras, sugere-se explorar redes com maior número de neurônios e topologias mais próximas de sistemas biológicos reais.

REFERÊNCIAS

- ARENAS, A.; DÍAZ-GUILERA, A.; KURTHS, J.; MORENO, Y.; ZHOU, C. Synchronization in complex networks. **Physics Reports**, v. 469, n. 3, p. 93–153, 2008. Disponível em: <https://piccardi.faculty.polimi.it/VarieCsr/Papers/Arenas2008.pdf>. Acesso em: 30 nov. 2023.
- BENNETT, M. V. L.; ZUKIN, R. S. Electrical coupling and neuronal synchronization in the mammalian brain. **Neuron**, v. 41, n. 4, p. 495–511, 2004. Disponível em: [https://www.cell.com/neuron/pdf/S0896-6273\(04\)00043-1.pdf](https://www.cell.com/neuron/pdf/S0896-6273(04)00043-1.pdf). Acesso em: 30 nov. 2023.
- BOCCALETTI, S.; KURTHS, J.; OSIPOV, G.; VALLADARES, D. L.; ZHOU, C. The synchronization of chaotic systems. **Physics Reports**, v. 366, n. 1–2, p. 1–101, 2002. Disponível em: <https://piccardi.faculty.polimi.it/VarieCsr/Papers/Boccaletti2002.pdf>. Acesso em: 30 nov. 2023.
- BOCCALETTI, S.; LATORA, V.; MORENO, Y.; CHAVEZ, M.; HWANG, D.-U. Complex networks: Structure and dynamics. **Physics Reports**, v. 424, n. 4–5, p. 175–308, 2006. Disponível em: https://cosnet.bifi.es/publications/phys_rep_2006.pdf. Acesso em: 30 nov. 2023.
- BREAKSPEAR, M.; HEITMANN, S.; DAFFERTSHOFER, A. Generative models of cortical oscillations: neurobiological implications of the kuramoto model. **Frontiers in Human Neuroscience**, v. 4, p. 190, 2010. Disponível em: <https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fnhum.2010.00190/full>. Acesso em: 15 fev. 2024.
- BUZSÁKI, G. **Rhythms of the Brain**. Oxford, UK: Oxford University Press, 2006. Disponível em: https://example.com/buzsaki_rhythms.pdf. Acesso em: 03 set. 2024. ISBN 9780195301069.
- BUZSÁKI, G.; DRAGUHN, A. Neuronal oscillations in cortical networks. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 304, n. 5679, p. 1926–1929, 2004.
- CABELLA, B. C. T. **Inferência estatística em métodos de análise de ressonância magnética funcional**. Tese (Tese de doutorado) — Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 2008. Acesso em: 21 mar. 2024. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45133/tde-23092008-161652/pt-br.php>.
- DESTEXHE, A.; MAINEN, Z. F.; SEJNOWSKI, T. J. Synthesis of models for excitable membranes, synaptic transmission and neuromodulation using a common kinetic formalism. **Journal of Computational Neuroscience**, v. 1, n. 2, p. 195–230, 1994. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF00961734>. Acesso em: 15 dez. 2024.
- FLORES, F. M. C. **Sincronización de modelos matemáticos de neuronas mediante acoplamientos basados en umbrales**. Dissertação (Mestrado em Control y Sistemas Dinámicos) — Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, San Luis Potosí, México, 2019. Disponível em: <https://example.com/flores2019.pdf>. Acesso em: 07 out. 2024.
- HINDMARSH, J. L.; ROSE, R. M. A model of neuronal bursting using three coupled first-order differential equations. **Proceedings of the Royal Society of London. Series B. Biological Sciences**, v. 221, n. 1222, p. 87–102, 1984. Acesso em: 21 mar. 2024. Disponível em: <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspb.1984.0024>.
- IZHIKEVICH, E. M. Simple model of spiking neurons. **IEEE Transactions on Neural Networks**, v. 14, n. 6, p. 1569–1572, nov. 2003. Disponível em: <https://www.izhikevich.org/publications/spikes.pdf>.

JIA, Q.; CHEN, Z. Influence of network connection and synchronisation for hindmarsh-rose model. **International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation**, v. 14, n. 5, p. 407–414, 2013. Disponível em: <https://www.agriculture-xprt.com/articles/influence-of-network-connection-and-synchronisation-for-hindmarsh-rose-model-436698>.

KANDEL, E. R.; SCHWARTZ, J. H.; JESSELL, T. M.; SIEGELBAUM, S. A.; HUDSPETH, A. J. **Princípios de Neurociência**. 5. ed. Porto Alegre: AMGH Editora, 2014. Disponível em: <https://example.com/kandel2014.pdf>. Acesso em: 22 jul. 2024. ISBN 9788580551632.

KORN, H.; FAURE, P. Is there chaos in the brain? ii. experimental evidence and related models. **Comptes Rendus Biologies**, v. 326, n. 9, p. 787–840, 2003. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631069103001865>. Acesso em: 12 jan. 2025.

MAINIERI, M. S. **Sincronização de Neurônios de Hindmarsh-Rose**. Dissertação (Dissertação de mestrado) — Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), 2006. Acesso em: 12 de abril de 2024. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/7692>.

MEDVEDEV, G. S. Synchronization of coupled limit cycles. **Journal of Nonlinear Science**, v. 19, n. 2, p. 205–232, 2009. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00332-010-9088-4>. Acesso em: 23 fev. 2025.

NONLINEAR dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. [S.l.: s.n.].

OLIVEIRA, L. F. de. Transmissão sináptica. **Brazilian Journal of Anesthesiology**, Sociedade Brasileira de Anestesiologia (SBA), v. 44, n. 1, p. 25–33, 2020.

OLMI, S.; POLITI, A.; TORCINI, A. Collective chaos in pulse-coupled neural networks. **EPL**, v. 92, n. 6, p. 60007, 2010. Acesso em: 03 de março de 2024. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1209/0295-5075/92/60007>.

PECORA, L. M.; CARROLL, T. L. Synchronization in chaotic systems. **Physical Review Letters**, v. 64, p. 821–824, 1990.

PIKOVSKY, A.; ROSENBLUM, M.; KURTHS, J. **Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2003. Acesso em: 15 dez. 2024. ISBN 9780521533522. Disponível em: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511755743>.

RABINOVICH, M. I.; VARONA, P.; SELVERSTON, A. I.; ABARBANEL, H. D. Dynamical principles in neuroscience. **Reviews of Modern Physics**, American Physical Society, v. 78, n. 4, p. 1213–1265, 2006.

REYES, M. B. **Estudo de comportamentos dinâmicos em redes neuronais: análise teórica e experimental**. Tese (Tese de doutorado) — Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005. Acesso em: 23 mar. 2024. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/43/43132/tde-10102009-100639/pt-br.php>.

RULKOV, N. F. Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map. **Physical Review E**, APS, v. 65, n. 4, p. 041922, 2002.

SHILNIKOV, A.; CALABRESE, R. L.; CYMBALYUK, G. Mechanism of bistability: Tonic spiking and bursting in a neuron model. **Physical Review E**, v. 77, n. 6, p. 061919, 2008.

SOMERS, D.; KOPELL, N. Rapid synchronization through fast threshold modulation. **Biological cybernetics**, Springer, v. 68, n. 5, p. 393–407, 1993.

STROGATZ, S. H. **Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order**. New York: Hyperion, 2003. ISBN 9780786887217.

TORREALDEA, F. J.; SANCHO, J. M.; GRAÑA, M. Synchronization of hindmarsh-rose neurons by short and long time-delayed feedback. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 214, n. 1, p. 105–119, 2006. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167278905003739>. Acesso em: 18 mar. 2025.

WANG, Q.; PERC, M.; DUAN, Z. Synchronization transitions on small-world neuronal networks due to finite information transmission delays. **Physical Review E**, APS, v. 78, n. 2, p. 026116, 2008.

ZHOU, C.; KURTHS, J.; HU, B. Synchronization in coupled noisy neural oscillators. **Physical Review Letters**, v. 87, n. 9, p. 098101, 2001. Acesso em: 23 mar. 2024. Disponível em: <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.87.098101>.

APÊNDICE A – SINCRONISMO DE REDE - EXTENSÃO COM RUÍDO INTENSO

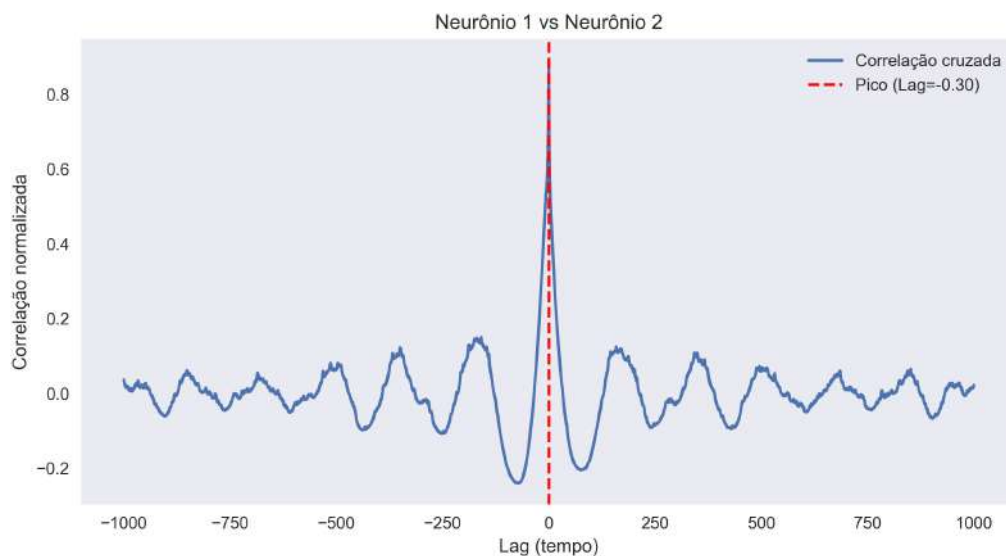
A.1 TOPOLOGIA UNIDIMENSIONAL COM CINCO NEURÔNIOS

A.1.1 Acoplamento elétrico $g_e = 1.0$, com ruído $\beta = 1.0$

Após analisar os efeitos de perturbações fracas de ruído sobre a coerência dinâmica da rede, esta subseção explora o impacto de um regime de ruído intenso ($\beta = 1,0$) sobre a propagação e sincronização da atividade oscilatória em uma topologia unidirecional mantendo o acoplamento elétrico forte ($g_e = 1,0$). Este cenário representa um limite relevante, em que se espera que o ruído interfira de maneira significativa nos mecanismos de acoplamento e organização de fase.

As análises a seguir combinam medidas de correlação cruzada e dispersão de fase entre pares de neurônios para avaliar como o ruído forte modula a dinâmica coletiva e a capacidade da rede de preservar relações temporais coerentes ao longo da cadeia.

Figura 123 – Correlação cruzada entre os neurônios 1 e 2

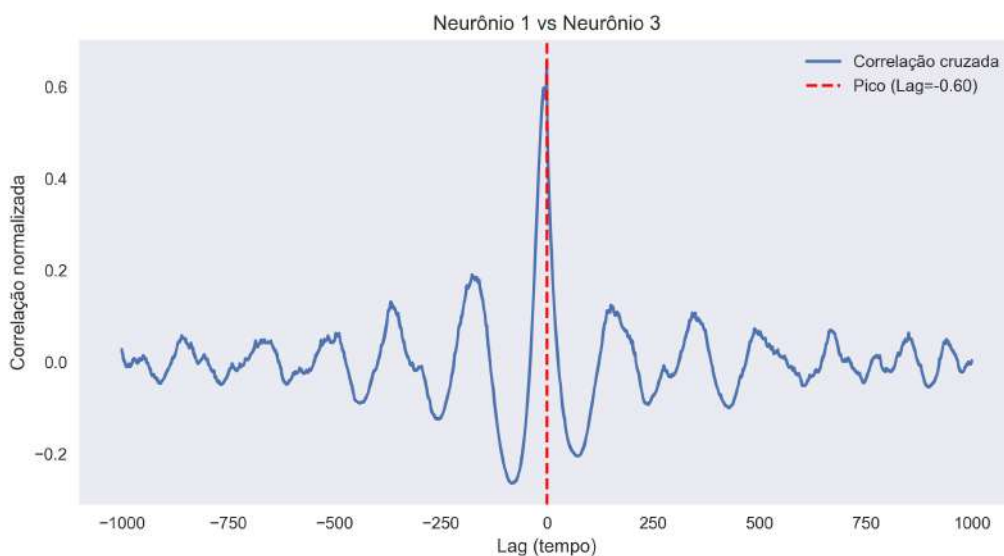


Fonte: elaborado pela própria autora.

Neste regime com $\beta = 1.0$, observa-se que os pares neurônio 1–2 e 1–3, Figuras 123 e 124, apresentam correlação máxima elevada (cerca de 0,85 e 0,6), com picos próximos de *lag* zero. Isso indica sincronização quase simultânea, compatível com a influência direta e eficaz do neurônio 1 sobre os demais em uma rede unidirecional.

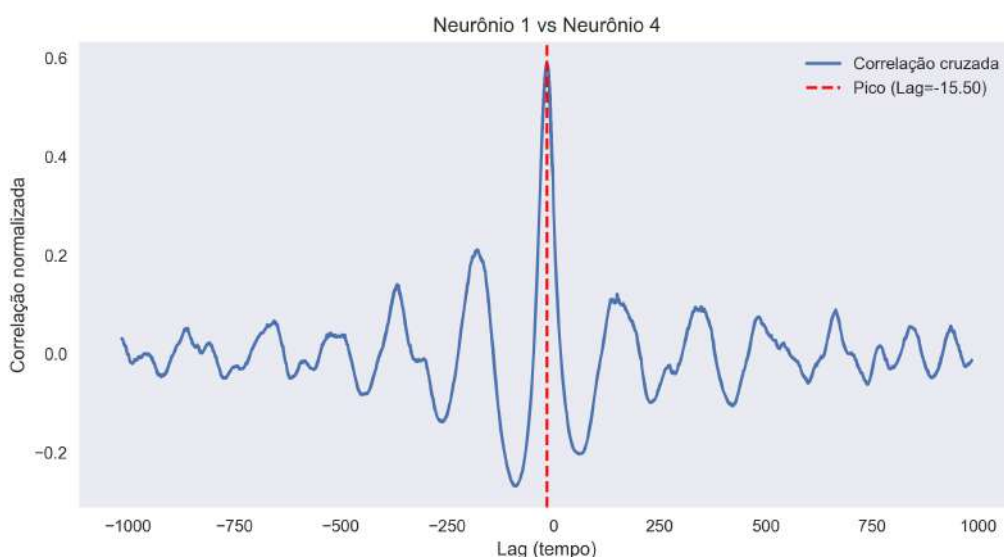
Já os pares 1–4 e 1–5, Figuras 125 e 126, apresentam picos de correlação em *lags* negativos mais acentuados (cerca de $-15,5$ e $-21,6$), sugerindo que a atividade do neurônio 1 antecede significativamente a dos neurônios mais distantes. Esse padrão é compatível com a propagação

Figura 124 – Correlação cruzada entre os neurônios 1 e 3



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 125 – Correlação cruzada entre os neurônios 1 e 4

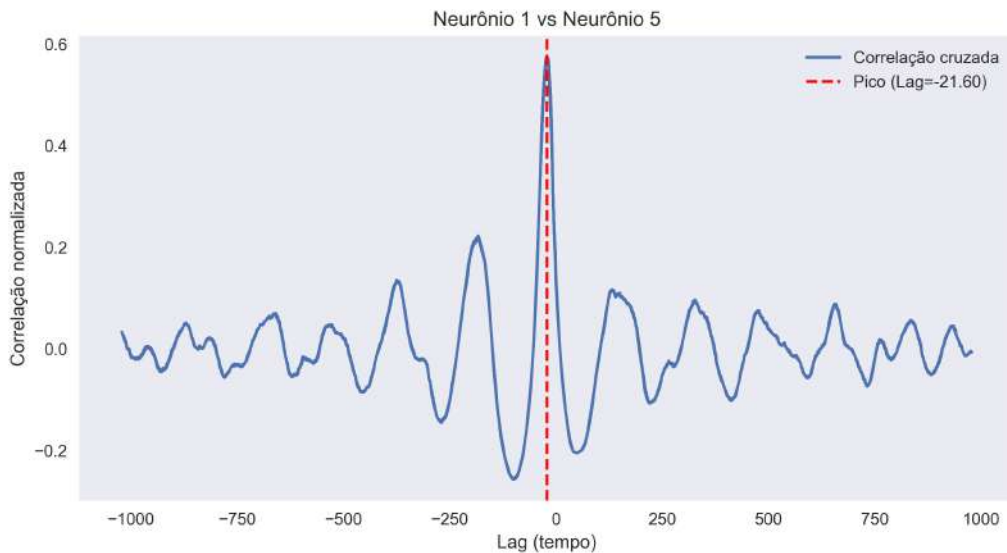


Fonte: elaborado pela própria autora.

sequencial da dinâmica ao longo da rede, com acúmulo de atraso proporcional à distância topológica.

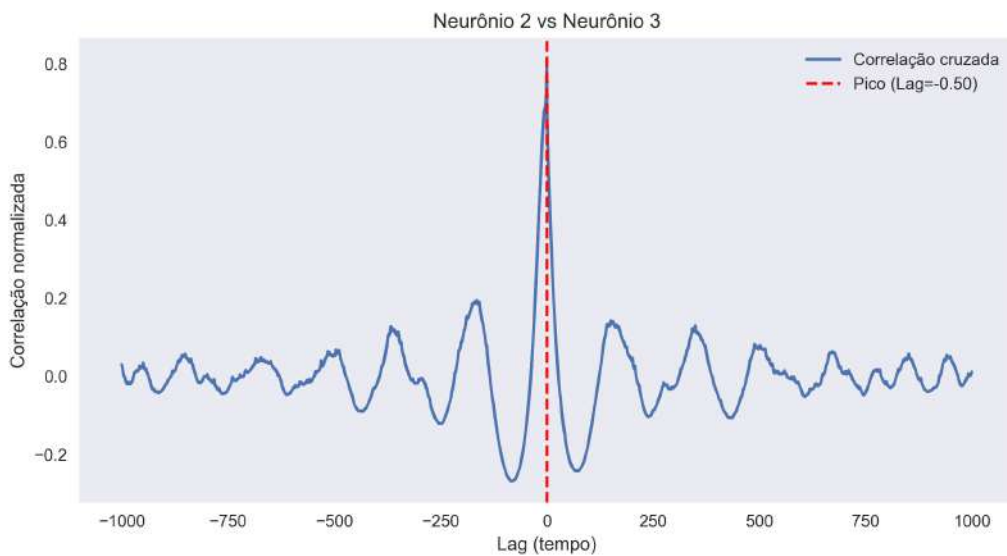
A redução progressiva da correlação e o aumento da defasagem reforçam a existência de uma hierarquia temporal imposta pela direção do acoplamento: neurônios próximos da fonte reagem rapidamente, enquanto os mais distantes apresentam resposta atrasada e menos coerente. Mesmo sob ruído intenso, a organização unidirecional da rede permanece dominante na condução da atividade oscilatória.

A análise dos gráficos de correlação cruzada revela uma tendência clara de sincronização entre os neurônios ao longo da cadeia unidirecional. Entre os neurônios 1 e 2 (Figura 123), observa-se um pico em $lag \approx -0,30$, indicando que o neurônio 2 responde com um pequeno atraso à atividade do



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 126 – Correlação cruzada entre os neurônios 2 e 3



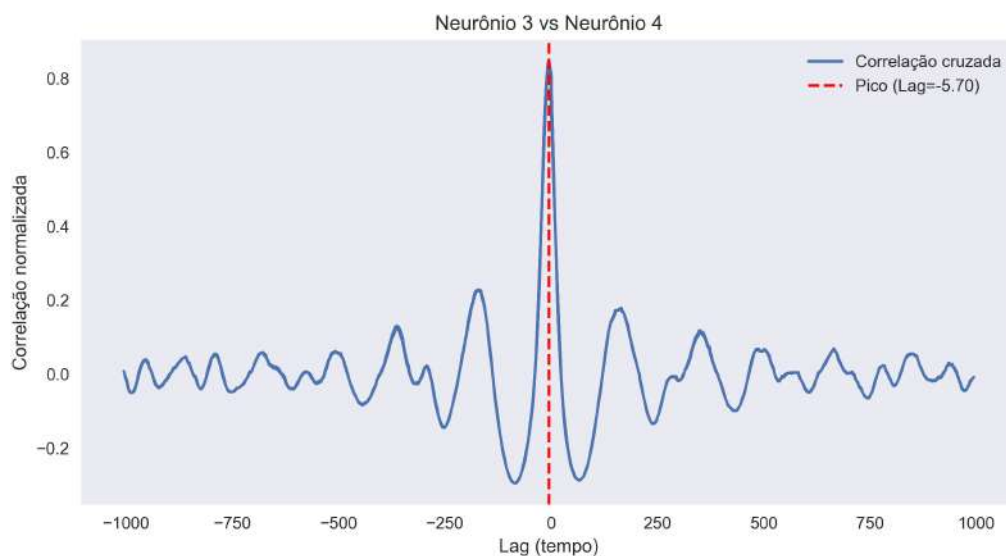
Fonte: elaborado pela própria autora.

neurônio 1. Da mesma forma, o par 2-3 (Figura 126) apresenta um pico em $lag = -0,50$, sugerindo um tempo de resposta ligeiramente maior.

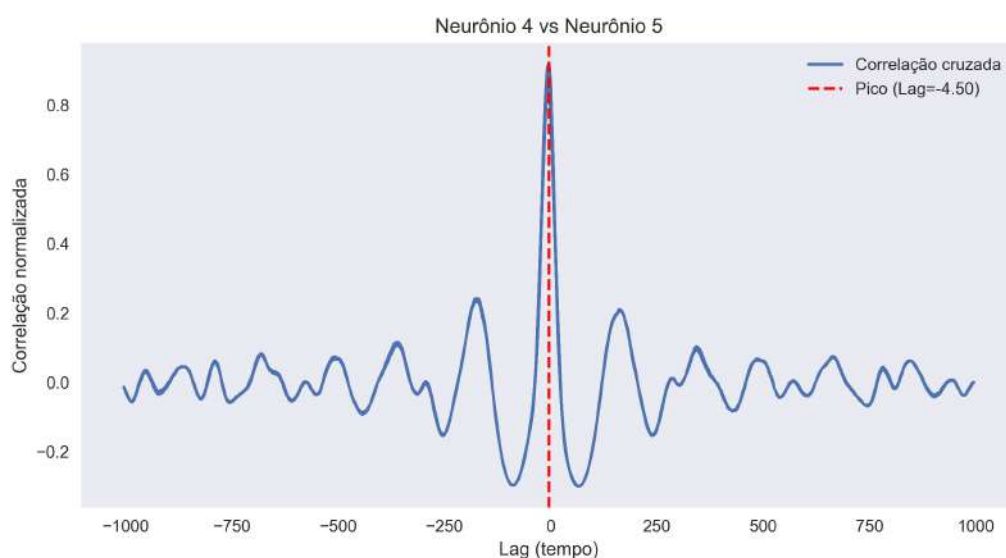
Nos pares mais distantes na cadeia, como 3-4 (Figura 127) e 4-5 (Figura 128), os picos aparecem em $lags$ significativamente mais negativos, $-5,70$ e $-4,50$ respectivamente. Esses resultados indicam atrasos cumulativos na propagação da atividade elétrica ao longo da rede, possivelmente devido à dinâmica interna de cada neurônio e à natureza unidirecional do acoplamento.

Em todos os casos, os valores máximos de correlação cruzada permanecem acima de 0,8, mesmo com a presença de ruído, evidenciando uma sincronização robusta entre os neurônios. Isso confirma a eficácia do acoplamento elétrico unidirecional em promover uma propagação coerente da atividade, ainda que com defasagens temporais progressivas entre os neurônios mais distantes.

Figura 127 – Correlação cruzada entre os neurônios 3 e 4



Fonte: elaborado pela própria autora.



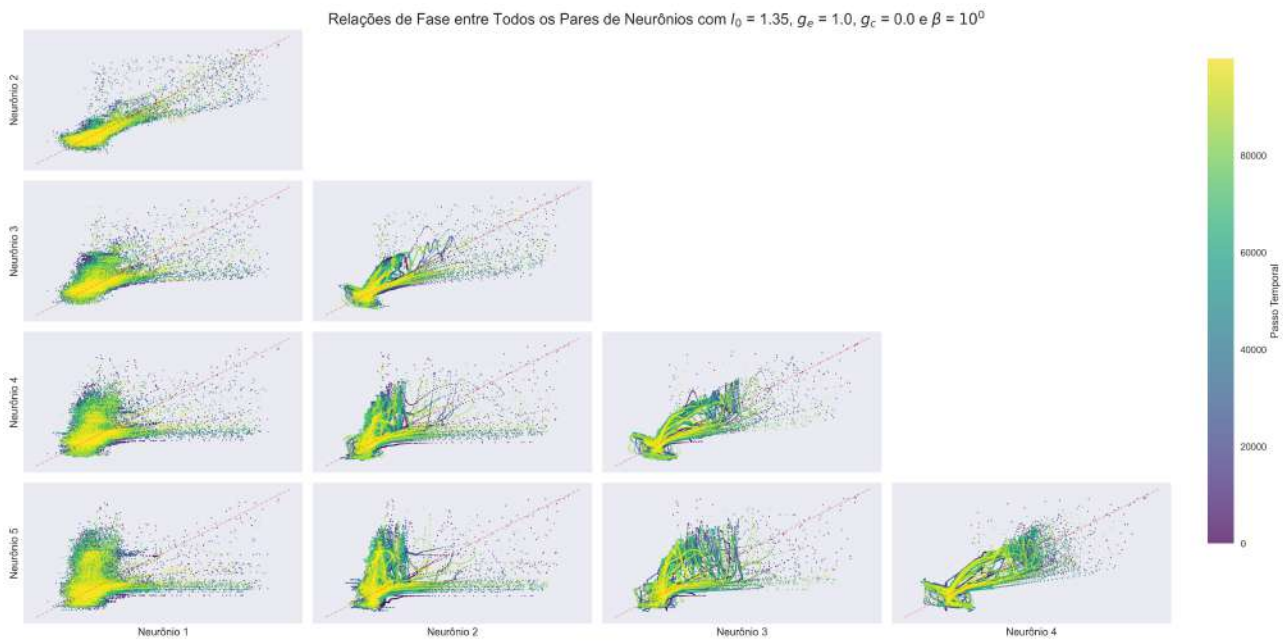
Fonte: elaborado pela própria autora.

A análise dos diagramas de fase entre pares de neurônios reforça os efeitos da topologia unidirecional da rede. Conforme ilustrado na Figura 128, os neurônios 1 e 2 apresentam uma concentração significativa de pontos ao redor da linha de identidade, especialmente nas fases mais avançadas da simulação (tons amarelados), o que indica uma sincronização de fase parcial. Esse padrão é consistente com a influência direta que o neurônio 1 exerce sobre o neurônio 2 via acoplamento elétrico unidirecional.

Comportamento semelhante é observado para o par 2-3, ainda que com leve aumento da dispersão, sugerindo uma defasagem crescente. Essa tendência reflete o alinhamento gradual das fases entre os neurônios conforme a atividade é propagada ao longo da cadeia.

Por outro lado, pares de neurônios mais distantes, como 1-4 e 1-5, exibem uma dispersão muito

Figura 128 – Relação de fases entre neurônios subsequentes



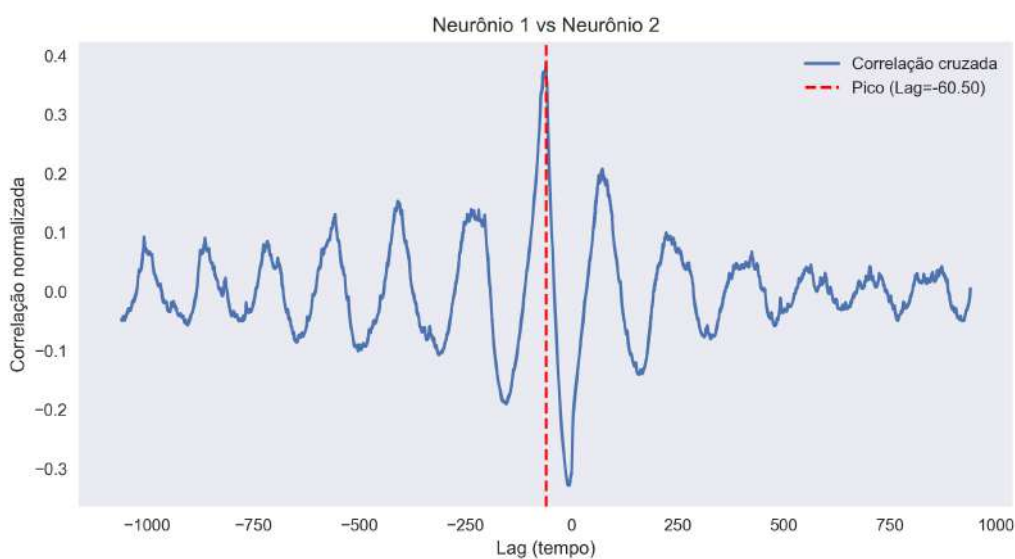
maior dos pontos em relação à diagonal. Essa perda de coerência de fase indica que a influência do neurônio 1 sobre os neurônios 4 e 5 é significativamente atenuada, em razão da transmissão indireta por múltiplos intermediários. A degradação da sincronização direta nesses casos é compatível com os atrasos acumulados ao longo da rede unidirecional.

Adicionalmente, nota-se em alguns pares, como os neurônios 2-3 e 3-4, a presença de trajetórias suavemente curvas, caracterizando um padrão de *phase-locking* com defasagem constante. Esse fenômeno sugere que os neurônios receptores mantêm uma diferença de fase estável em relação aos emissores, mesmo sob ruído, ajustando sua dinâmica à influência persistente, sem retroalimentação.

Essas observações estão em concordância com modelos teóricos de sincronização em redes acopladas assimetricamente e sujeitas a ruído Pikovsky, Rosenblum e Kurths (2003), confirmando que a direção do acoplamento e a topologia da rede têm papel determinante na organização temporal dos estados oscilatórios.

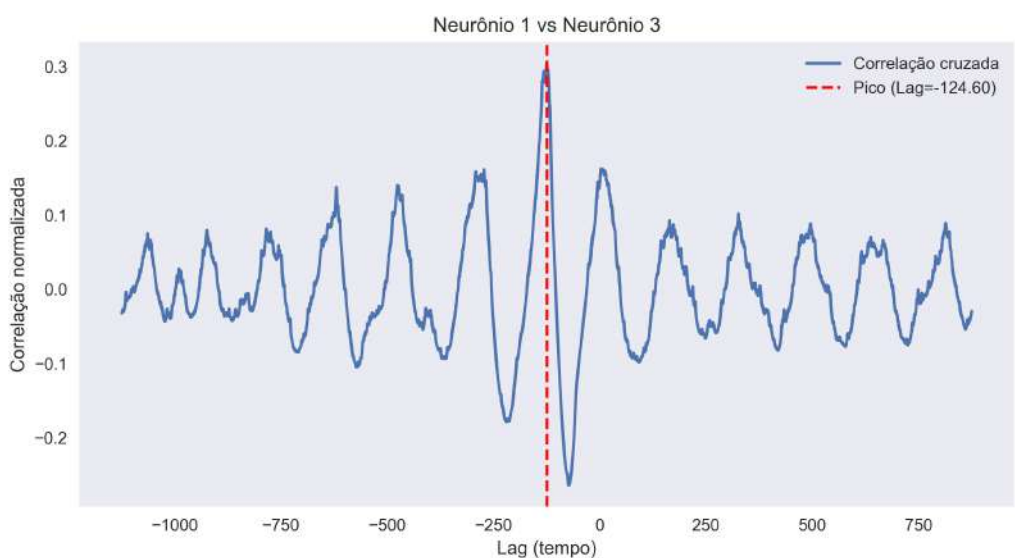
A.1.2 Acoplamento químico $g_c = 1.0$ e $\beta = 1.0$

Figura 129 – Correlação cruzada entre os neurônios 1 e 2



Fonte: elaborado pela própria autora.

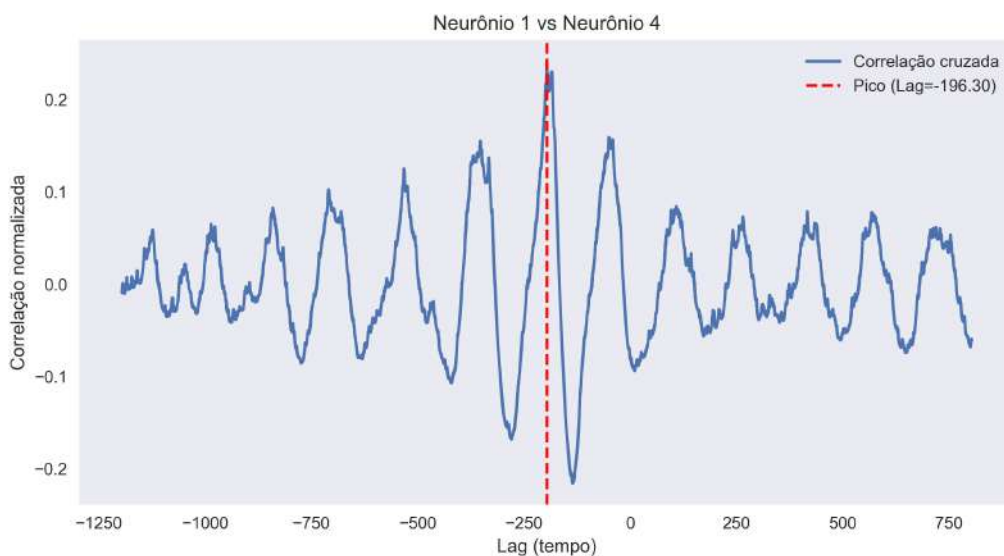
Figura 130 – Correlação cruzada entre os neurônios 1 e 3



Fonte: elaborado pela própria autora.

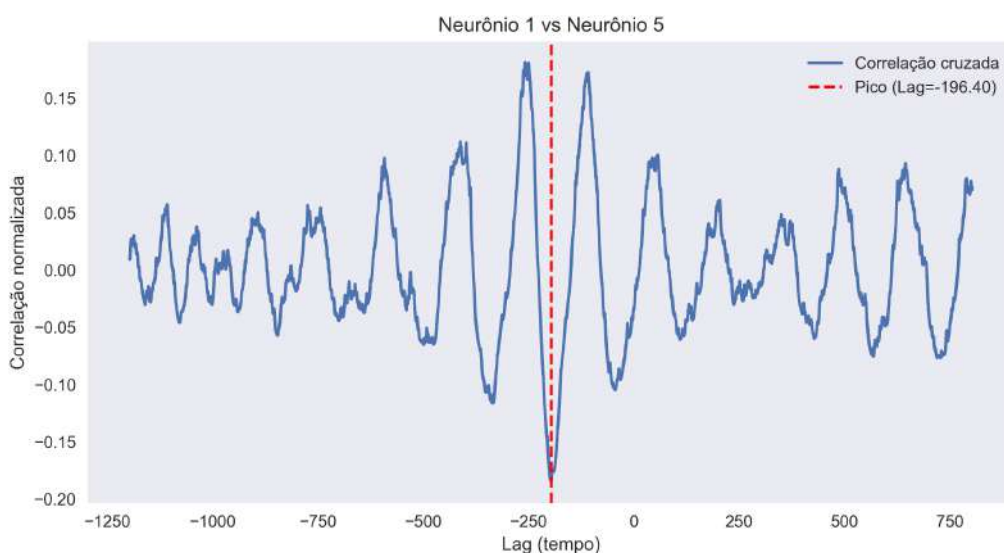
A análise da correlação cruzada entre o neurônio 1 e os demais neurônios da rede revelou uma tendência clara de defasagem crescente, compatível com uma organização funcional em cadeia unidirecional. A Figura 129 mostra a correlação cruzada entre o neurônio 1 e o neurônio 2, com um pico proeminente localizado em aproximadamente -60,5 unidades de tempo, indicando que a atividade do neurônio 1 antecede sistematicamente a do neurônio 2. A forma bem definida e relativamente

Figura 131 – Correlação cruzada entre os neurônios 1 e 4



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 132 – Correlação cruzada entre os neurônios 1 e 5



Fonte: elaborado pela própria autora.

simétrica da curva sugere um acoplamento químico direto e eficaz, ainda que unidirecional, em que o neurônio 1 influencia o neurônio 2 sem receber retorno.

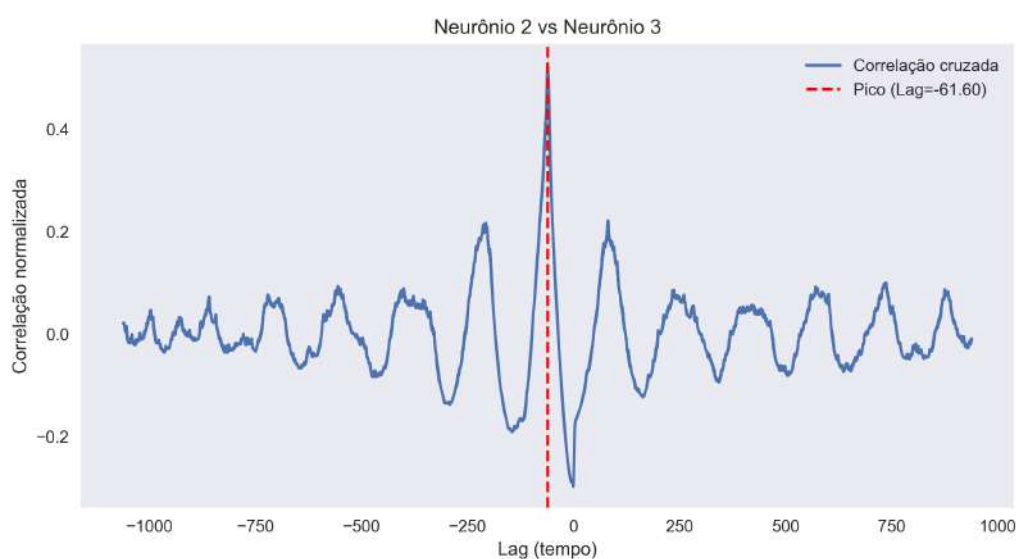
Nos pares subsequentes, observa-se um aumento progressivo da defasagem temporal, reflexo direto da direcionalidade do acoplamento. A Figura 130, correspondente ao par neurônio 1 e neurônio 3, apresenta o pico de correlação em torno de -124,6 unidades de tempo. A curva torna-se mais larga e assimétrica, indicando uma relação funcional indireta, provavelmente mediada por múltiplos neurônios intermediários ao longo da cadeia unidirecional.

Esse padrão se repete nos pares mais distantes. A correlação entre o neurônio 1 e o neurônio 4 (Figura 131) mostra um pico em -196,3, com uma curva ainda mais dispersa e irregular, refletindo

a atenuação da coerência temporal à medida que o sinal se propaga pela rede. O efeito do ruído e da dissipação também se torna mais evidente nesses casos, prejudicando a força da sincronização.

Por fim, a Figura 132 apresenta o par neurônio 1 e neurônio 5, cujo pico está localizado em -196,4 — muito próximo ao valor observado para o neurônio 4. Essa semelhança de defasagens sugere que os neurônios 4 e 5 recebem influência similar do neurônio 1, possivelmente por compartilharem uma posição final na cadeia ou por atuarem como terminais funcionais do fluxo unidirecional de informação. A redução na amplitude da correlação reforça a interpretação de que o acoplamento químico unidirecional induz uma propagação sequencial com atraso cumulativo, na qual o neurônio 1 atua como oscilador líder, desencadeando a dinâmica dos demais ao longo do tempo.

Figura 133 – Correlação cruzada entre os neurônios 2 e 3



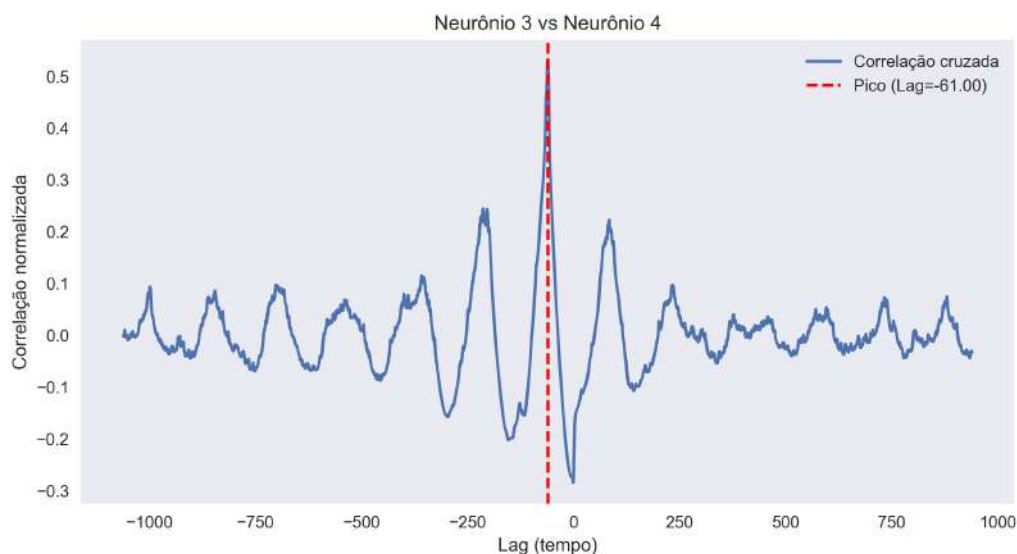
Fonte: elaborado pela própria autora.

As funções de correlação cruzada entre os pares consecutivos de neurônios revelam picos em *lags* positivos praticamente constantes: +61,60 entre os neurônios 2 e 3, +61,00 entre os neurônios 3 e 4, e +60,90 entre os neurônios 4 e 5. Esses valores indicam uma propagação sequencial e uniforme da atividade ao longo da rede, compatível com o acoplamento químico unidirecional.

A repetição dos padrões de defasagem, aliada à simetria das curvas ao redor dos picos, sugere um regime estável de sincronização com atraso fixo, mesmo na presença de ruído. Esses resultados reforçam a ideia de que a estrutura de acoplamento direcional é eficaz em organizar a dinâmica coletiva da rede em uma sequência coerente de ativações rítmicas.

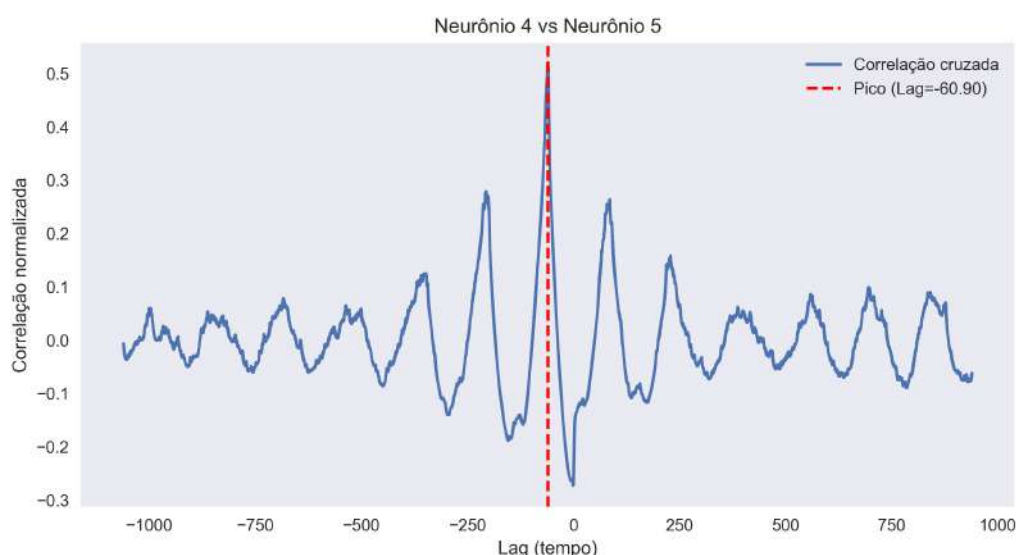
Na Figura 136, observa-se que, para a maioria dos pares de neurônios, a densidade de pontos se acumula ao longo de trajetórias bem definidas, sugerindo uma relação de fase estável e ordenada, mesmo em presença de ruído. A presença de curvas finas que se aproximam progressivamente da diagonal de identidade ($y = x$) indica que, embora existam defasagens iniciais — compatíveis com

Figura 134 – Correlação cruzada entre os neurônios 3 e 4



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 135 – Correlação cruzada entre os neurônios 4 e 5



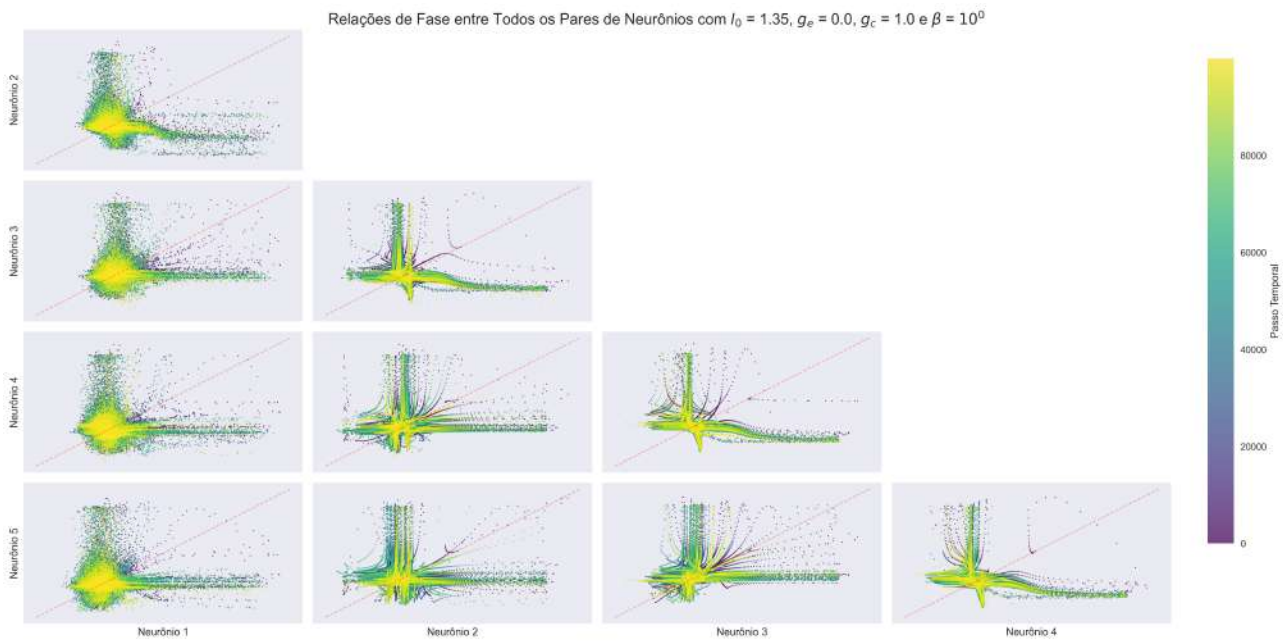
Fonte: elaborado pela própria autora.

a assimetria do acoplamento unidirecional, os neurônios tendem a organizar suas fases ao longo do tempo Strogatz (2003).

Essa tendência é particularmente evidente nos pares diretamente conectados pela rede unidirecional, como neurônio 1–2, 2–3 e 4–5, cujas curvas estreitas indicam uma defasagem relativamente constante e coerente, compatível com a natureza sequencial do acoplamento. Esses pares mostram trajetórias de fase bem alinhadas, o que reflete a influência direta exercida por um neurônio sobre o seguinte na cadeia funcional.

Em contraste, nos pares mais distantes topologicamente, como neurônio 1–3 ou 1–5, a maior dispersão dos pontos sugere sincronização menos robusta ou atrasos acumulados, devido à falta de

Figura 136 – Relação de fases entre neurônios subsequentes



Fonte: elaborado pela própria autora.

acoplamento direto e ao efeito cumulativo do ruído e da propagação ao longo da rede (IZHIKEVICK, 2007). Esses padrões refletem a limitação natural de redes unidirecionais, nas quais neurônios mais distais dependem da coerência das dinâmicas anteriores.

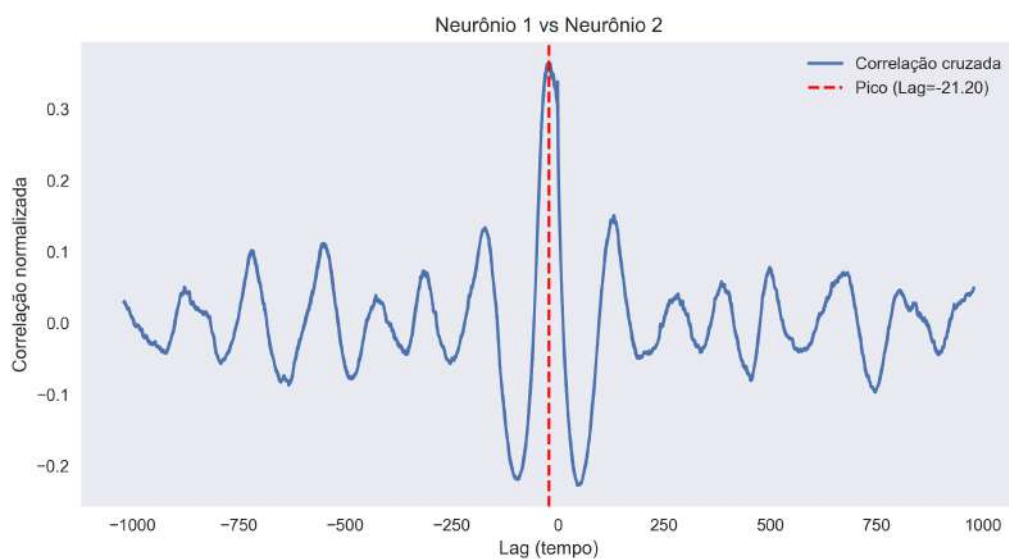
O gradiente de cores ao longo dos pontos revela a evolução temporal da sincronização. Em muitos pares, os pontos iniciais (tons mais escuros) são mais dispersos, enquanto os finais (tons claros) se concentram ao longo de trajetórias bem definidas. Isso evidencia um processo de auto-organização das fases ao longo da simulação, compatível com a propagação causal da dinâmica promovida pelo acoplamento unidirecional.

Essas observações estão em acordo com os resultados da correlação cruzada e reforçam a ideia de que, mesmo sem acoplamento elétrico ($g_e = 0$), os acoplamentos químicos unidirecionais são suficientes para induzir uma coerência na dinâmica de fase, ainda que com atrasos estruturais impostos pela topologia da rede Rabinovich *et al.* (2006).

A.2 TOPOLOGIA BIDIMENSIONAL COM CINCO NEURÔNIOS

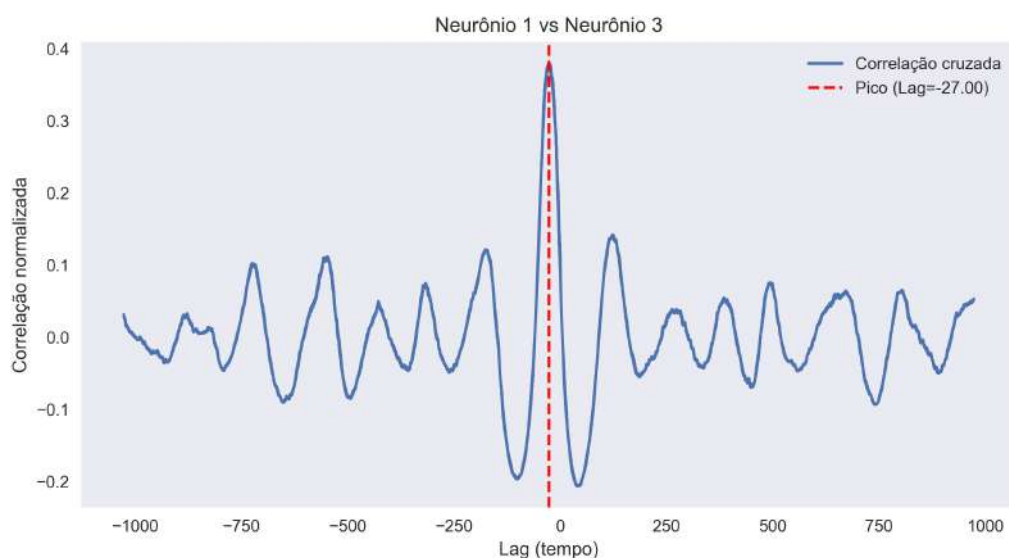
A.2.1 Acoplamento elétrico $g_e = 1.0$ e $\beta = 1.0$

Figura 137 – Correlação cruzada entre os neurônios 1 e 2



Fonte: elaborado pela própria autora.

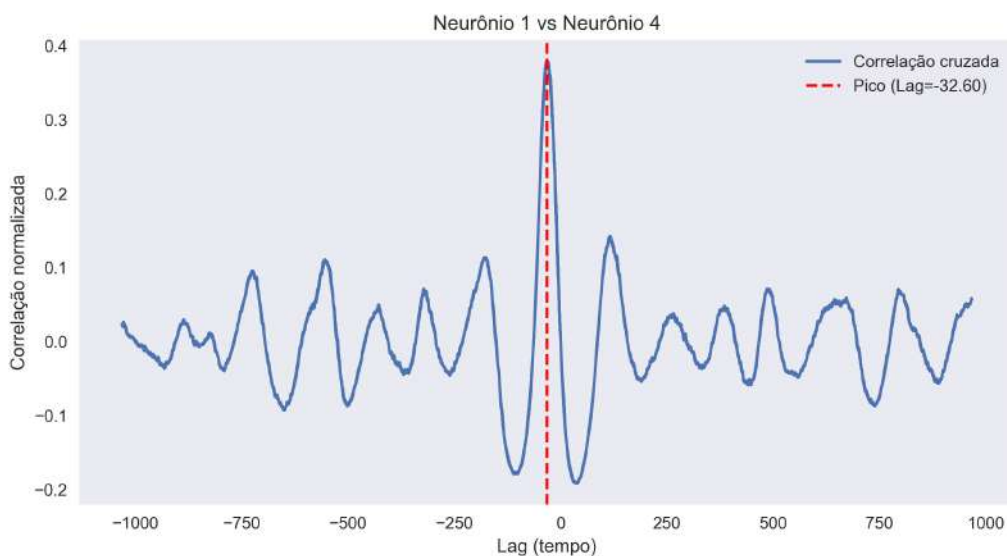
Figura 138 – Correlação cruzada entre os neurônios 1 e 3



Fonte: elaborado pela própria autora.

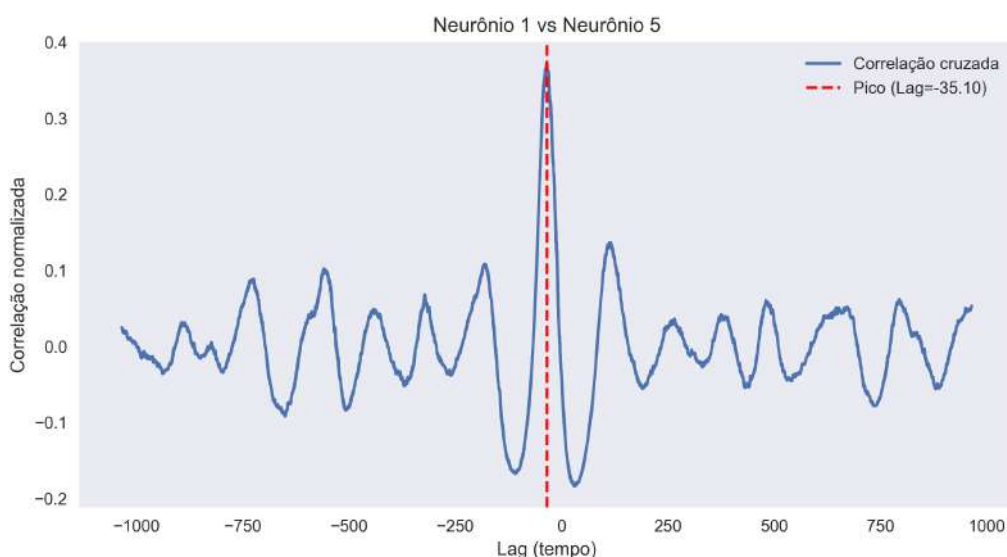
Observa-se que o pico da correlação cruzada entre os neurônios 1 e 2 ocorre em aproximadamente $-21,2$ unidades de tempo, indicando que a atividade do neurônio 2 precede a do neurônio 1. Esse padrão é ainda mais evidente nos pares 1-3 e 1-4, com picos em torno de $-27,0$ e $-32,6$ unidades de tempo, respectivamente. Tais valores sugerem uma propagação sequencial da atividade ao longo do loop formado pelos neurônios 2, 3 e 4.

Figura 139 – Correlação cruzada entre os neurônios 1 e 4



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 140 – Correlação cruzada entre os neurônios 1 e 5

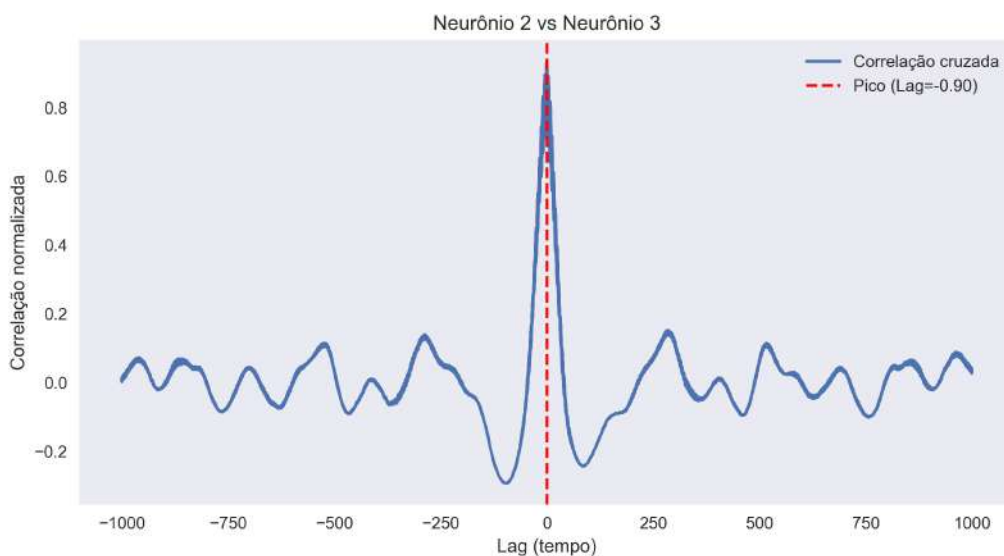


Fonte: elaborado pela própria autora.

A correlação entre os neurônios 1 e 5, por sua vez, apresenta um pico em aproximadamente $-35,1$ unidades de tempo, o que também indica que o neurônio 5 influencia o neurônio 1 com certo atraso. Esse comportamento é compatível com a topologia da rede, em que os sinais percorrem o caminho do loop antes de atingir o neurônio 5, retornando posteriormente ao neurônio 1. Essa dinâmica é reforçada pelo fato de os picos das correlações cruzadas apresentarem uma defasagem crescente com o aumento da distância topológica no circuito.

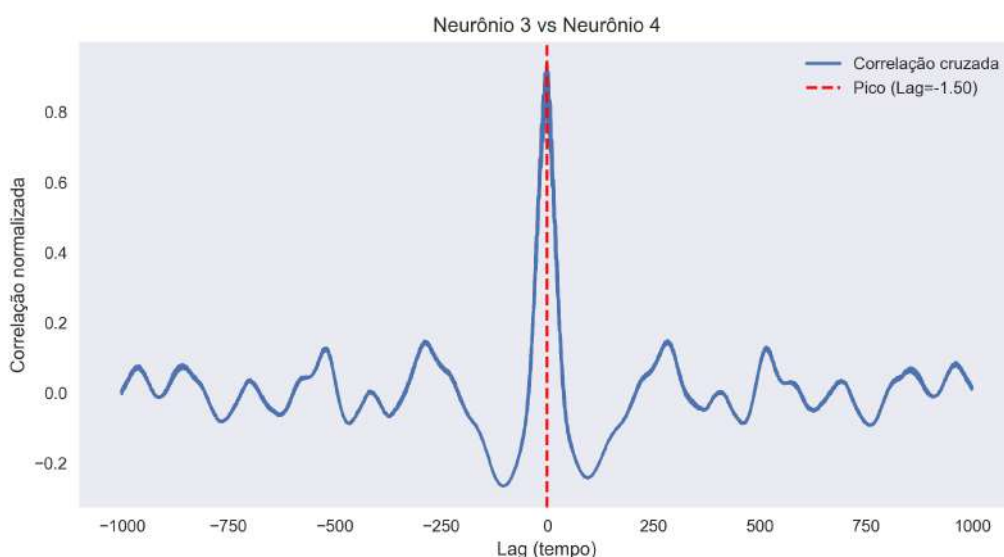
No gráfico entre os neurônios 1 e 2, observa-se um pico de correlação em *lag* negativo ($\text{Lag} = -21,2$), o que indica que o neurônio 1 antecipa a atividade do neurônio 2, sugerindo uma direção funcional do acoplamento de 1 para 2. A sequência de pares seguintes ($2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 4$ e $4 \rightarrow 5$) mantém

Figura 141 – Correlação cruzada entre os neurônios 2 e 3



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 142 – Correlação cruzada entre os neurônios 3 e 4

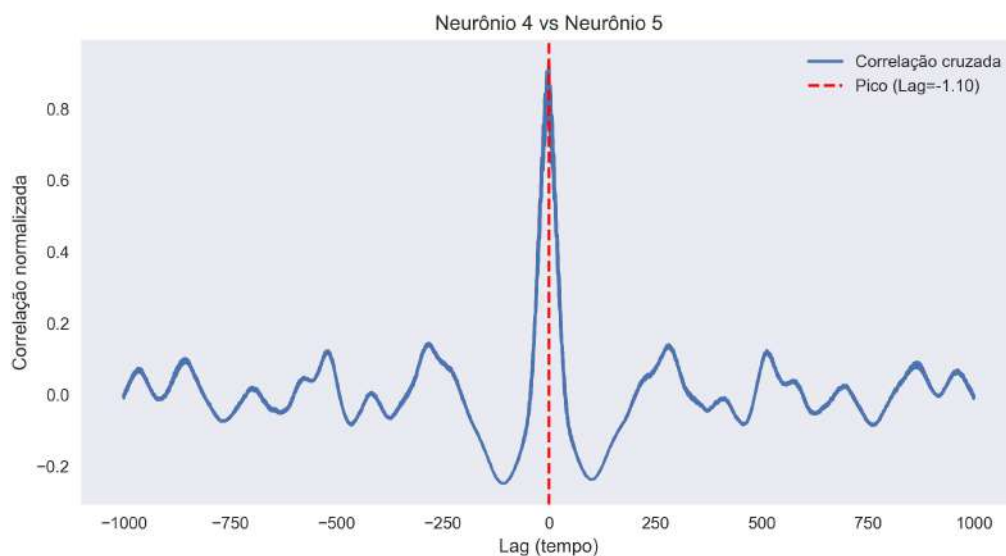


Fonte: elaborado pela própria autora.

essa coerência: os picos de correlação ocorrem próximos de zero, porém levemente negativos (*lags* entre $-0,9$ e $-1,5$ unidades de tempo), o que indica um encadeamento dinâmico com atraso mínimo, coerente com um acoplamento unidirecional forte e sincronizado.

Particularmente, o loop formado entre os neurônios 2, 3 e 4 revela uma propagação de atividade contínua, com sinais altamente correlacionados e defasagens mínimas. Essa organização cíclica pode favorecer a manutenção de padrões oscilatórios coerentes, uma vez que os sinais tendem a se reforçar mutuamente. Além disso, a presença de *lag* sistematicamente negativo em todos os pares sucessivos reforça o caráter direcional do acoplamento, ainda que este seja puramente elétrico (passivo). Por fim, o neurônio 5, que recebe entrada do neurônio 4, também apresenta forte correlação com pequeno

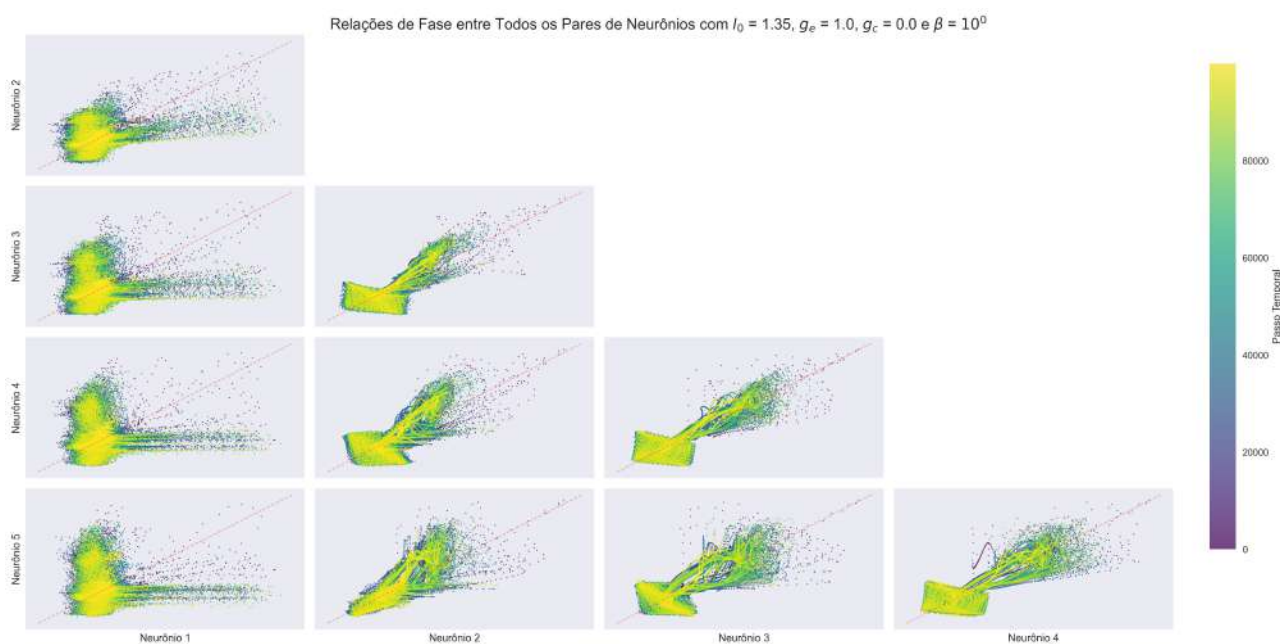
Figura 143 – Correlação cruzada entre os neurônios 4 e 5



Fonte: elaborado pela própria autora.

atraso negativo, o que mantém a coerência do padrão de transmissão de sinais ao longo da rede.

Figura 144 – Relação de fases entre neurônios subsequentes



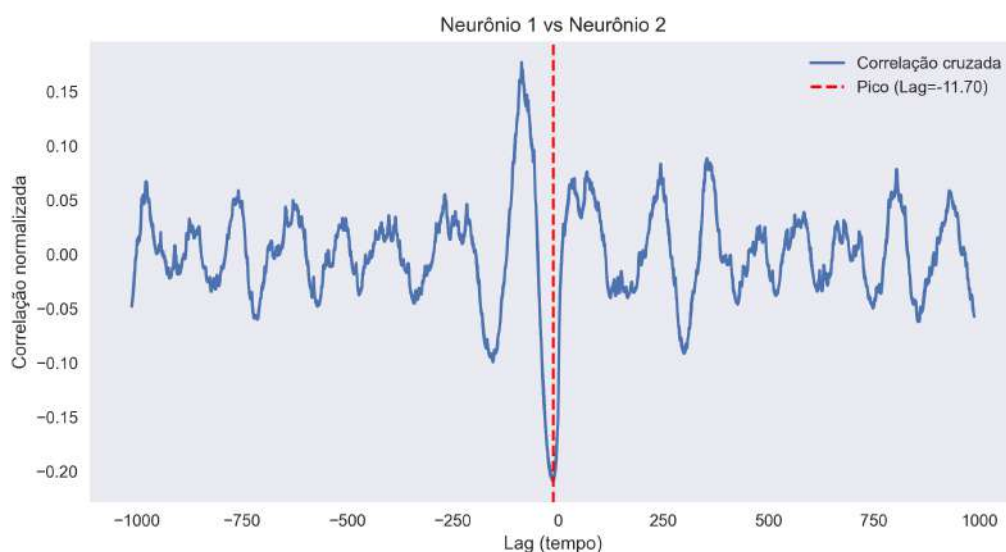
Fonte: elaborado pela própria autora.

Observa-se um padrão típico de propagação direcional com sinais que se alinham ao longo da diagonal em pares específicos, refletindo sincronização parcial com defasagens características. Em particular, destaca-se a forte organização entre os neurônios 2, 3 e 4 — os pares que formam um loop funcional na topologia da rede. Esses pares exibem trajetórias concentradas e com menor dispersão, sugerindo coerência de fase ao longo do tempo. A evolução das cores (do roxo ao amarelo) indica que a relação entre esses neurônios se estabiliza, mantendo sincronia ao longo da simulação.

Já os pares como 1-2 e 4-5, que não fazem parte do loop cíclico, apresentam maior dispersão e padrões mais assimétricos, o que sugere uma sincronização mais fraca e atrasos mais acentuados na propagação do sinal. Isso é coerente com o papel do neurônio 1 como iniciador da dinâmica e do neurônio 5 como terminal da cadeia de transmissão.

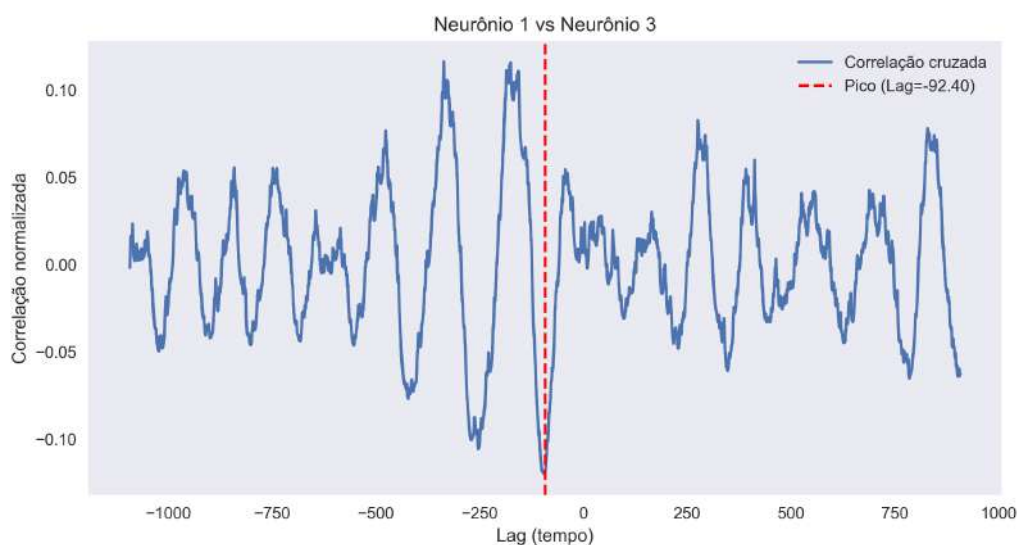
A.2.2 Acoplamento elétrico $g_c = 1.0$ e $\beta = 1.0$

Figura 145 – Correlação cruzada entre os neurônios 1 e 2



Fonte: elaborado pela própria autora.

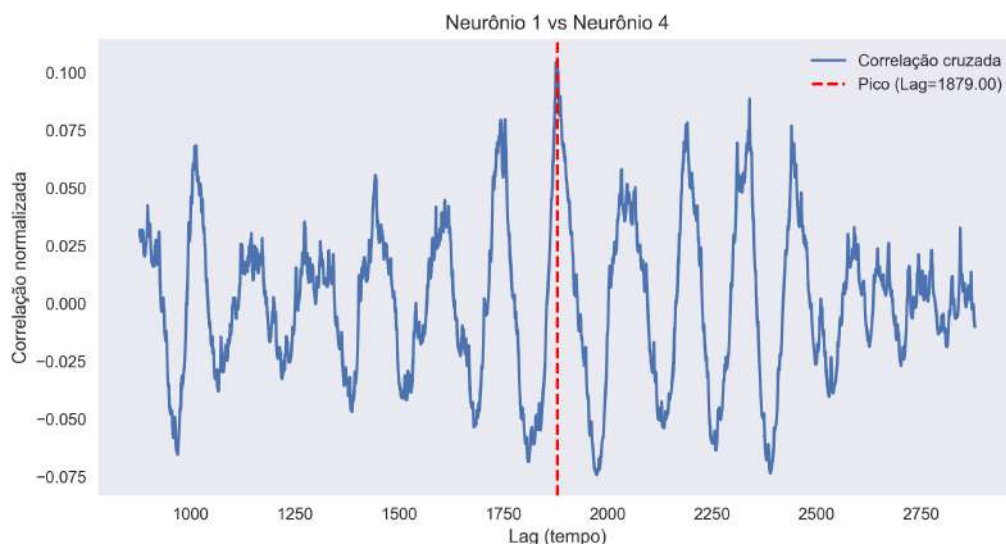
Figura 146 – Correlação cruzada entre os neurônios 1 e 3



Fonte: elaborado pela própria autora.

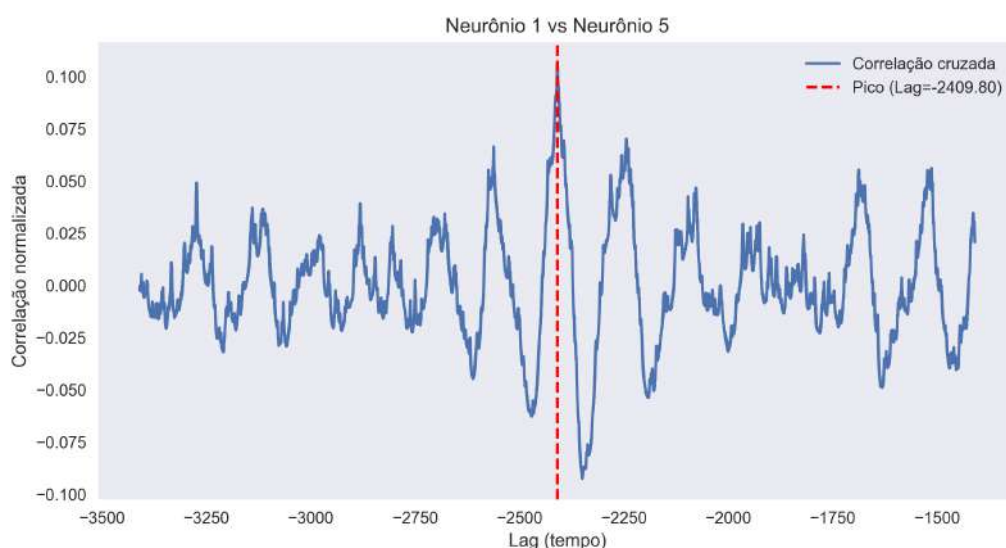
Observamos que os neurônios que compõem o loop (neurônios 2, 3 e 4) apresentam picos de correlação cruzada em defasagens relativamente pequenas, o que sugere forte acoplamento dinâmico com o neurônio 1. Especificamente, os máximos de correlação ocorreram nos seguintes lags: neurônio 2 (Lag = -11.70), neurônio 3 (Lag = -92.40) e neurônio 4 (Lag = 1879.00). Esses valores indicam uma sequência de propagação da atividade a partir do neurônio 1 para o loop e vice-versa, com diferentes atrasos temporais, refletindo a organização direcional e cíclica do acoplamento.

Figura 147 – Correlação cruzada entre os neurônios 1 e 4



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 148 – Correlação cruzada entre os neurônios 1 e 5



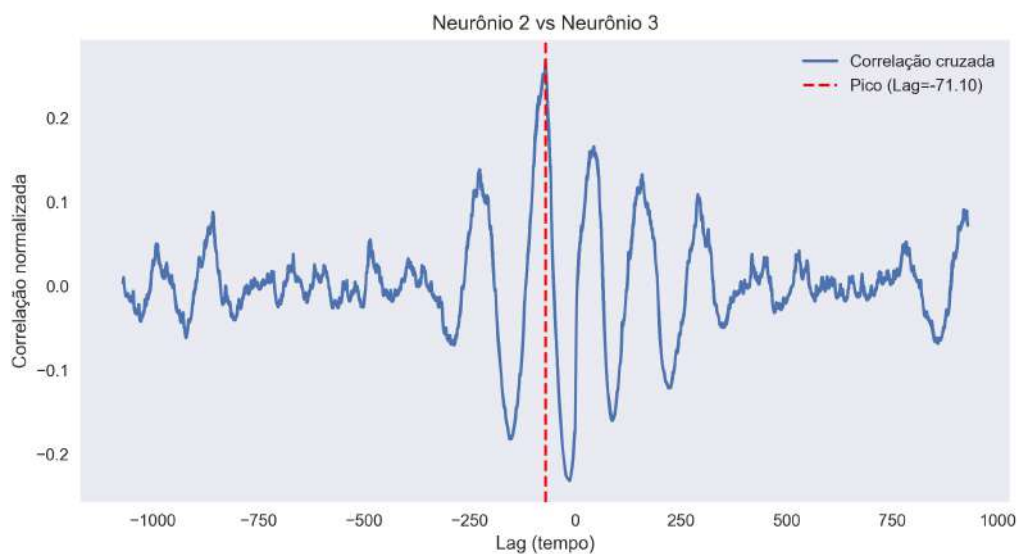
Fonte: elaborado pela própria autora.

Por outro lado, o neurônio 5, que não participa diretamente do loop, apresentou uma defasagem significativamente maior no pico de correlação ($\text{Lag} = -2409.80$), evidenciando uma menor influência ou um acoplamento mais indireto com o neurônio 1.

Esses resultados sugerem que o loop entre os neurônios 2, 3 e 4 atua como um núcleo funcional fortemente acoplado dentro da rede, influenciando a sincronia local e o padrão de propagação dos sinais, enquanto os neurônios externos ao ciclo (como o neurônio 5) se mostram menos sincronizados com o neurônio 1.

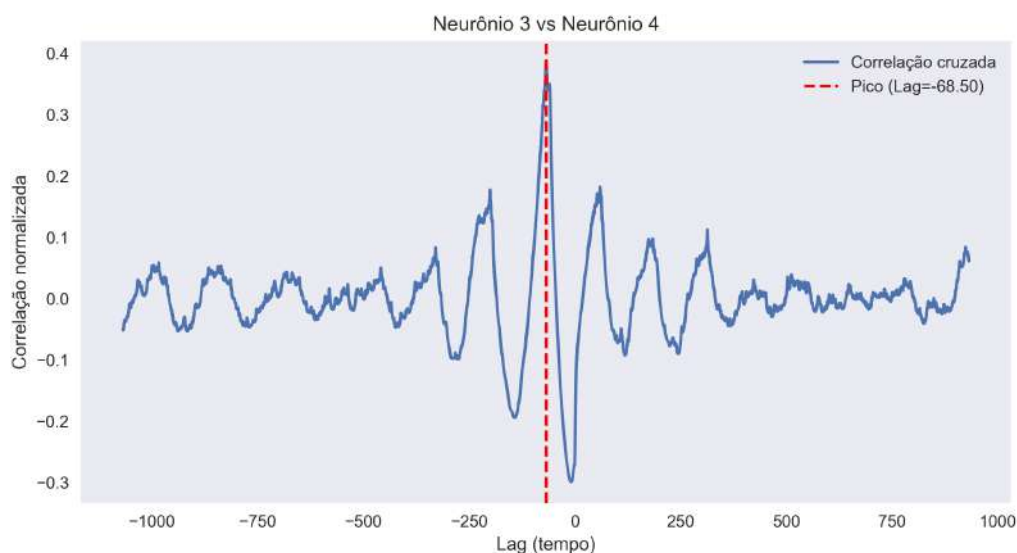
Observou-se que, para todos os pares analisados, o valor do *lag* no pico da correlação cruzada foi negativo, indicando que o segundo neurônio em cada par tende a responder após o primeiro.

Figura 149 – Correlação cruzada entre os neurônios 2 e 3



Fonte: elaborado pela própria autora.

Figura 150 – Correlação cruzada entre os neurônios 3 e 4

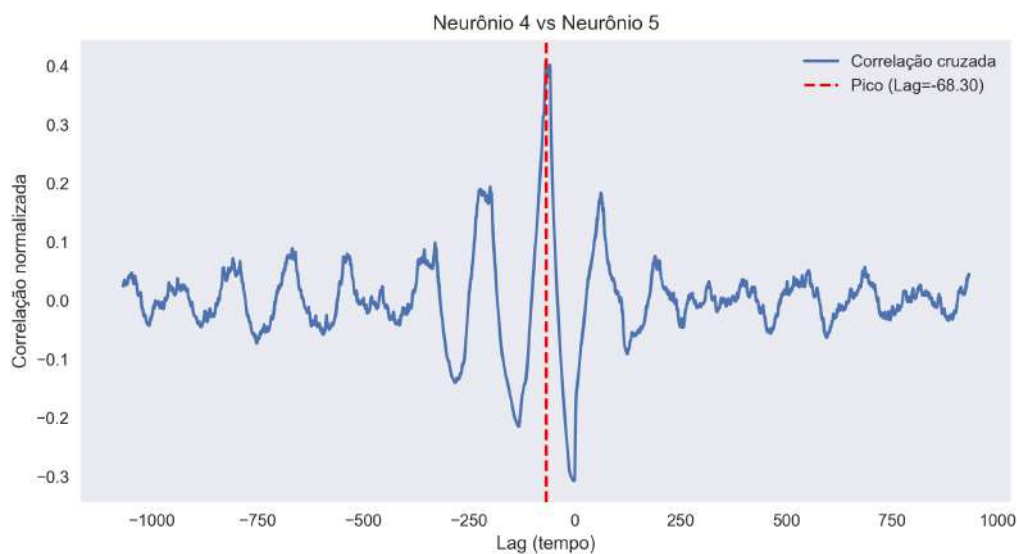


Fonte: elaborado pela própria autora.

Especificamente, o *lag* para o par Neurônio 1 e Neurônio 2 foi de aproximadamente $-11,7$, sugerindo que o Neurônio 2 segue temporalmente o Neurônio 1. Para os pares subsequentes, os atrasos foram mais acentuados: $-71,1$ para Neurônio 2 e Neurônio 3, $-68,5$ para Neurônio 3 e Neurônio 4, e $-68,3$ para Neurônio 4 e Neurônio 5. Esses valores indicam um padrão sequencial de propagação, com atrasos relativamente constantes entre os neurônios intermediários, o que sugere um fluxo de atividade coerente em cadeia.

Portanto, a partir dos atrasos observados, pode-se inferir uma direção de propagação da atividade neural que segue a sequência: Neurônio 1 $\rightarrow$ Neurônio 2 $\rightarrow$ Neurônio 3 $\rightarrow$ Neurônio 4 $\rightarrow$ Neurônio 5. A maior força de correlação observada entre os pares (3,4) e (4,5) pode indicar conexões mais

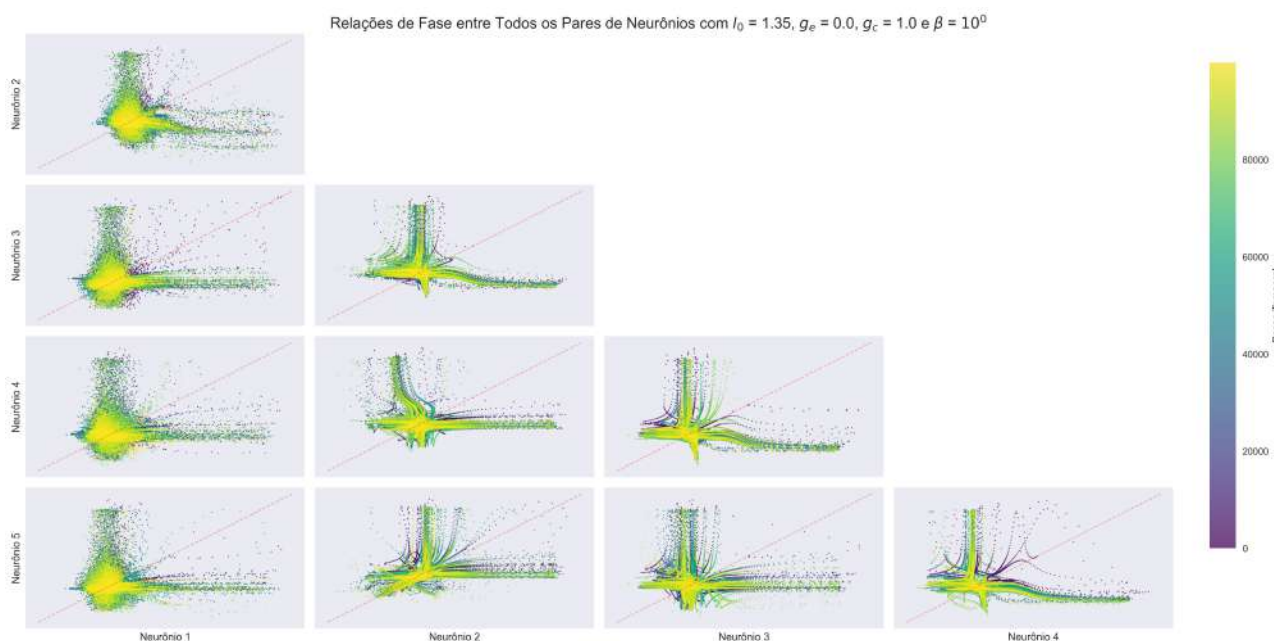
Figura 151 – Correlação cruzada entre os neurônios 4 e 5



Fonte: elaborado pela própria autora.

fortes ou mais diretas nessas etapas da cadeia. Ademais, o menor atraso entre os Neurônios 1 e 2 pode refletir uma conexão mais imediata ou uma sincronia mais estreita entre esses dois elementos.

Figura 152 – Relação de fases entre neurônios subsequentes



Fonte: elaborado pela própria autora.

Observa-se que os pares que compõem o caminho sequencial da rede — como (1,2) e (4,5) — exibem trajetórias organizadas, com padrões alongados e convergência ao longo do tempo para regiões específicas do espaço de fase. Esses padrões indicam coerência temporal entre os sinais dos neurônios acoplados, refletindo a conectividade direta entre eles.

No entanto, um comportamento distinto emerge no subconjunto formado pelos neurônios 2,

3 e 4, os quais formam um loop. Os subgráficos correspondentes aos pares (2,3), (3,4) e (4,2) apresentam trajetórias com estruturas mais ricas, curvas bem definidas e uma convergência mais forte ao longo do tempo. A coloração progressiva sugere que esse trio de neurônios entra em um regime de acoplamento de fase sustentado e bidirecional, característico de uma estrutura com realimentação cíclica. Esse tipo de topologia é conhecido por favorecer estados dinâmicos estáveis ou até mesmo auto-organizados, como sincronização mútua ou osciladores de fase bloqueada.

Além disso, os pares mais distantes na topologia da rede, como (1,4), (1,5) ou (2,5), exibem trajetórias mais dispersas e menos estruturadas, indicando relações de fase mais fracas ou inconsistentes. Isso reforça a ideia de que o acoplamento funcional é fortemente influenciado pela conectividade topológica.

Portanto, o gráfico revela que a presença do loop entre os neurônios 2, 3 e 4 atua como uma subunidade funcional coesa, com forte sincronização interna. Essa subestrutura pode atuar como um núcleo dinâmico dentro da rede, modulando o fluxo de informação para as regiões vizinhas, como os neurônios 1 e 5.

APÊNDICE B – CÓDIGOS PYTHON

```

# -*- coding: utf-8 -*-
"""
@author: silif
"""

import os
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Criar a pasta para guardar as imagens se não existir
output_folder = 'output_images_teste_base'
os.makedirs(output_folder, exist_ok=True)

def FS(r0, t, p, I, ge, gc, K):
    # Definir la función F que calcula las derivadas de un neurônio
    def F(r, t, p, I):
        a, b, c, d, rr, S, x0 = p
        x, y, z = r

        # Calcular las derivadas del neurônio
        dx = y - a * x**3 + b * x**2 + I - z
        dy = c - d * x**2 - y
        dz = -rr * z + rr * S * (x - x0)

        return np.array([dx, dy, dz])

    # Extraer los estados de los dos neurônios
    r1 = r0[0:3]

    # Extraer las corrientes de los dos neurônios
    I1 = I

    # Calcular las derivadas del primer neurônio
    dr1 = F(r1, t, p, I1)

    # Devolver el vector de derivadas de los dos neurônios
    return dr1

# Intervalo de integração
N = 20000
dt = 0.1
t = np.arange(0, N, dt)

# Condições iniciais
Nn = 1
r0 = 0.0 * np.random.uniform(0.0, 1.0, Nn*3)

a, b, c, d = [1.0, 3.0, 1.0, 5.0]
rr, S, x0 = [0.005, 4.0, -1.6]

I0 = 1.35 # Corrente constante.

p = [a, b, c, d, rr, S, x0]
K = np.diag([1, 0, 0]) # Matriz de acoplamento para o Neurônio 1

ge = 1.0 # acoplamento elétrico
gc = 0.0 # acoplamento químico

beta=0.0

```

```

# Inicializando M como um array NumPy
M = np.zeros((len(t), 3)) # 3 colunas para x, y, z

for i in range(len(t)):
    M[i] = r0 # Armazenar o estado atual

    I1_ruido = I0 + beta * np.random.normal(0.0, 1.0)
    I = I1_ruido

    k1 = dt * FS(r0, t[i], p, I, ge, gc, K)
    k2 = dt * FS(r0 + k1 / 2.0, t[i] + dt / 2.0, p, I, ge, gc, K)
    k3 = dt * FS(r0 + k2 / 2.0, t[i] + dt / 2.0, p, I, ge, gc, K)
    k4 = dt * FS(r0 + k3, t[i] + dt, p, I, ge, gc, K)

    r = r0 + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6.0
    r0 = r

# Extraíndo as variáveis
x = M[:, 0] # Potencial de membrana
y = M[:, 1] # Variável de recuperação
z = M[:, 2] # Inibição

plt.figure(figsize=(18, 6))
plt.subplot(3, 1, 1)
plt.plot(t, x, color='black')
plt.title(f'Potencial de Membrana com I = {I0}')
plt.xlim([5000, 7000])
plt.xlabel('Tempo')
plt.ylabel('x', fontsize=16) # Altere o número para o tamanho desejado
plt.grid(True)

plt.subplot(3, 1, 2)
plt.plot(t, y, color='blue')
plt.xlim([5000, 7000])
# plt.ylim([-6, 2])
plt.xlabel('Tempo')
plt.ylabel('y', fontsize=16)
plt.title(f'Variável de Membrana com I = {I0}')
plt.grid(True)

plt.subplot(3, 1, 3)
plt.plot(t, z, color='red')
plt.xlim([5000, 7000])
# plt.ylim([-6, 2])
plt.xlabel('Tempo')
plt.ylabel('z', fontsize=16)
plt.title(f'Inibição com I = {I0}')
plt.grid(True)

plt.tight_layout()
plt.savefig(os.path.join(output_folder, f'Series_temporais com I={I0}.png'))
plt.show()

# Extraíndo as variáveis
x = M[20000:, 0] # Potencial de membrana
y = M[20000:, 1] # Variável de recuperação
z = M[20000:, 2] # Inibição

```

```

# Criando os gráficos dos planos de fase
plt.figure(figsize=(12, 10))

# Gráfico do plano XY
plt.subplot(221)
plt.plot(x, y, label=f'I = {I}', color='blue')
plt.title('Plano XY')
plt.xlabel('x (Potencial de Membrana)')
plt.ylabel('y (Variável de Membrana)')
plt.legend()

# Gráfico do plano XZ
plt.subplot(222)
plt.plot(x, z, label=f'I = {I}', color='green')
plt.title('Plano XZ')
plt.xlabel('x (Potencial de Membrana)')
plt.ylabel('z (Inibição)')
plt.legend()

# Gráfico do plano YZ
plt.subplot(223)
plt.plot(y, z, label=f'I = {I}', color='red')
plt.title('Plano YZ')
plt.xlabel('y (Variável de Membrana)')
plt.ylabel('z (Inibição)')
plt.legend()

# Gráfico 3D
ax = plt.subplot(224, projection='3d')
ax.plot(x, y, z, label=f'I = {I}', color='purple')
ax.set_title('Gráfico 3D')
ax.set_xlabel('x (Potencial de Membrana)')
ax.set_ylabel('y (Variável de Membrana)')
ax.set_zlabel('z (Inibição)')
plt.legend()

plt.tight_layout()
plt.savefig(os.path.join(output_folder, f'Espaços de fase com I={I0}.png'))
plt.show()

```

```

# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Thu Apr 10 17:03:50 2025

@author: silif
"""
import os
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Create output folder
output_folder = 'LINEAR_10_de_ABRIL BETAS COMPLETO'
os.makedirs(output_folder, exist_ok=True)

# Parameters
N = 10000
dt = 0.1
t = np.arange(0, N, dt)
beta_values = np.array([0.0, 0.001, 0.01, 0.1, 1.0]) # All beta values to test
neurônios = np.array([1, 2, 3, 4, 5])

# Model parameters
a, b, c, d = 1.0, 3.0, 1.0, 5.0
rr, S, x0 = 0.005, 4.0, -1.6
I0 = 1.35
ge = 1.0
gc = 0.0
K = np.diag([1, 0, 0])
p = [a, b, c, d, rr, S, x0]

def FS(r0, t, p, I, ge, gc, K):
    def F(r, t, p, I):
        a, b, c, d, rr, S, x0 = p
        x, y, z = r
        dx = y - a * x**3 + b * x**2 + I - z
        dy = c - d * x**2 - y
        dz = -rr * z + rr * S * (x - x0)
        return np.array([dx, dy, dz])

    r1 = r0[0:3]
    r2 = r0[3:6]
    r3 = r0[6:9]
    r4 = r0[9:12]
    r5 = r0[12:15]

    I1, I2, I3, I4, I5 = I

    dr1 = F(r1, t, p, I1)
    dr2 = F(r2, t, p, I2) + ge * np.dot(K, r1 - r2) + gc * np.dot(K, ((r2 - 2.0) / (1 + np.exp(-
    dr3 = F(r3, t, p, I3) + ge * np.dot(K, r2 - r3) + gc * np.dot(K, ((r3 - 2.0) / (1 + np.exp(-
    dr4 = F(r4, t, p, I4) + ge * np.dot(K, r3 - r4) + gc * np.dot(K, ((r4 - 2.0) / (1 + np.exp(-
    dr5 = F(r5, t, p, I5) + ge * np.dot(K, r4 - r5) + gc * np.dot(K, ((r5 - 2.0) / (1 + np.exp(-

    return np.append(dr1, [dr2, dr3, dr4, dr5])

# Function to format beta as power of 10
def format_beta_power(beta):

```

```

if beta == 0:
    return r'$0$'
exponent = int(np.log10(beta))
return fr'$10^{\{exponent\}}$'

# Function to calculate SNR
def calculate_snr(x):
    D = 200

    A = np.zeros((D, D))
    for k in range(D):
        A[k, :] = x[2000 + k*D : 2000 + (k+1)*D].T
    u, s, vt = np.linalg.svd(A)
    Ps = sum(s[:31]**2)
    Pn = sum(s[32:]**2)
    return 10 * np.log10(Ps/Pn) # in dB

# Main simulation loop
with open(os.path.join(output_folder, 'resultados_completos.txt'), 'w') as file:
    file.write('Beta\tSNR1\tSNR2\tSNR3\tSNR4\tSNR5\n')
    file.write('-'*50 + '\n')

    for beta in beta_values:
        print(f"\nProcessing beta = {beta:.1e}")

        # Reset initial conditions
        r0 = 0.0 * np.random.uniform(0.0, 1.0, 15)
        M = []

        # Simulation
        for i in range(len(t)):
            M.append(r0)
            I1_ruido = I0 + beta * np.random.normal(0.0, 1.0)
            I = np.array([I1_ruido, I0, I0, I0, I0])

            # Runge-Kutta integration
            k1 = dt * FS(r0, t[i], p, I, ge, gc, K)
            k2 = dt * FS(r0 + k1/2.0, t[i] + dt/2.0, p, I, ge, gc, K)
            k3 = dt * FS(r0 + k2/2.0, t[i] + dt/2.0, p, I, ge, gc, K)
            k4 = dt * FS(r0 + k3, t[i] + dt, p, I, ge, gc, K)
            r0 = r0 + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6.0

        M = np.array(M)
        x1, x2, x3, x4, x5 = M[:, 0], M[:, 3], M[:, 6], M[:, 9], M[:, 12]

        # Calculate SNRs
        snr_results = [calculate_snr(x) for x in [x1, x2, x3, x4, x5]]

        # Format beta for titles
        beta_potencia = format_beta_power(beta)

        # Plot individual neuron time series and spectra
        neuron_data = [x1, x2, x3, x4, x5]
        colors = ['black', 'red', 'orange', 'green', 'purple']
        titles = [
            f'Série temporal e espectro de frequência do neurônio 1 com $I_0$ = {I0}, $g_e$ = {{
            f'Série temporal e espectro de frequência do neurônio 2 com $I_0$ = {I0}, $g_e$ = {{
            f'Série temporal e espectro de frequência do neurônio 3 com $I_0$ = {I0}, $g_e$ = {{
            f'Série temporal e espectro de frequência do neurônio 4 com $I_0$ = {I0}, $g_e$ = {{
            f'Série temporal e espectro de frequência do neurônio 5 com $I_0$ = {I0}, $g_e$ = {{
]

```

```

for i, (x, color, title) in enumerate(zip(neuron_data, colors, titles), start=1):
    fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(2, 1, figsize=(18, 9))

    # Time series
    ax1.plot(t, x, color=color)
    ax1.set_title(title, fontsize=16)
    ax1.set_ylabel('Amplitude')
    ax1.grid(True)

    freqs = np.fft.fftshift(np.fft.fftfreq(len(x), dt))
    fft_x = np.abs(np.fft.fftshift(np.fft.fft(x)))
    ax2.plot(freqs, fft_x, color=color)
    ax2.set_xlim(0, 1)
    ax2.set_yscale('log')
    ax2.set_xlabel('Frequência')
    ax2.set_ylabel('Amplitude')
    ax2.grid(True)

    plt.tight_layout()
    plt.savefig(os.path.join(output_folder, f'Série e espectro de neurônio_{i}_beta_
plt.close()

# Plot combined time series
fig, axs = plt.subplots(5, 1, figsize=(18, 9), sharex=True)
for j, ax in enumerate(axs):
    ax.plot(t, neuron_data[j], color=colors[j], label=f'Neurônio {j+1}')
    ax.legend(loc='upper right')
    ax.grid(True)
    ax.set_ylabel('Amplitude')

axs[-1].set_xlabel('Tempo')
# Aumentar o tamanho do título principal (use fontsize entre 16-20 para maior v:
plt.suptitle(f'Série temporal dos cinco neurônios com $I_0$ = {I0}, $g_e$ = {ge}
            fontsize=16)
plt.xlim(4000, 8000)
plt.tight_layout()
plt.savefig(os.path.join(output_folder, f'Todas_Series_beta_{beta:.0e}.png'))
plt.close()

# Save results
file.write(f"{beta:.1e}\t" + "\t".join(f"{snr:.2f}" for snr in snr_results) + "\n")

print("Simulation completed successfully!")

```

```

# -*- coding: utf-8 -*-
"""
@author: silif
"""
import os
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Create output folder
output_folder = 'LINEAR_10_de_ABRIL BETAS COMPLETO - LOOP'
os.makedirs(output_folder, exist_ok=True)

# Parameters
N = 10000
dt = 0.1
t = np.arange(0, N, dt)
beta_values = np.array([0.0, 0.0001, 0.001, 0.01, 0.1, 1.0]) # All beta values to test
neurônios = np.array([1, 2, 3, 4, 5])

# Model parameters
a, b, c, d = 1.0, 3.0, 1.0, 5.0
rr, S, x0 = 0.005, 4.0, -1.6
I0 = 1.35
ge = 1.0
gc = 0.0
K = np.diag([1, 0, 0])
p = [a, b, c, d, rr, S, x0]

def FS(r0, t, p, I, ge, gc, K):
    def F(r, t, p, I):
        a, b, c, d, rr, S, x0 = p
        x, y, z = r
        dx = y - a * x**3 + b * x**2 + I - z
        dy = c - d * x**2 - y
        dz = -rr * z + rr * S * (x - x0)
        return np.array([dx, dy, dz])

    r1 = r0[0:3]
    r2 = r0[3:6]
    r3 = r0[6:9]
    r4 = r0[9:12]
    r5 = r0[12:15]

    I1, I2, I3, I4, I5 = I

    dr1 = F(r1, t, p, I1)
    dr2 = F(r2, t, p, I2) + ge * np.dot(K, r1 - r2) + gc * np.dot(K, ((r2 - 2.0) / (1 + np.exp(-
    dr3 = F(r3, t, p, I3) + ge * np.dot(K, r2 - r3) + gc * np.dot(K, ((r3 - 2.0) / (1 + np.exp(-
    dr4 = F(r4, t, p, I4) + ge * np.dot(K, r3 - r4) + gc * np.dot(K, ((r4 - 2.0) / (1 + np.exp(-
    dr5 = F(r5, t, p, I5) + ge * np.dot(K, r4 - r5) + gc * np.dot(K, ((r5 - 2.0) / (1 + np.exp(-

    return np.append(dr1, [dr2, dr3, dr4, dr5])

# Function to format beta as power of 10
def format_beta_power(beta):
    if beta == 0:
        return r'$0$'
    exponent = int(np.log10(beta))
    return fr'$10^{{{exponent}}}$'

# Function to calculate SNR

```

```

def calculate_snr(x):
    D = 200
    A = np.zeros((D, D))
    for k in range(D):
        A[k, :] = x[2000 + k*D : 2000 + (k+1)*D].T
    u, s, vt = np.linalg.svd(A)
    Ps = sum(s[:31]**2)
    Pn = sum(s[32:]**2)
    return 10 * np.log10(Ps/Pn) # in dB

# Main simulation loop
with open(os.path.join(output_folder, 'resultados_completos - LOOP.txt'), 'w') as file:
    file.write('Beta\tSNR1\tSNR2\tSNR3\tSNR4\tSNR5\n')
    file.write('-'*50 + '\n')

    for beta in beta_values:
        print(f"\nProcessing beta = {beta:.1e}")

        # Reset initial conditions
        r0 = 0.0 * np.random.uniform(0.0, 1.0, 15)
        M = []

        # Simulation
        for i in range(len(t)):
            M.append(r0)
            I1_ruido = I0 + beta * np.random.normal(0.0, 1.0)
            I = np.array([I1_ruido, I0, I0, I0, I0])

            # Runge-Kutta integration
            k1 = dt * FS(r0, t[i], p, I, ge, gc, K)
            k2 = dt * FS(r0 + k1/2.0, t[i] + dt/2.0, p, I, ge, gc, K)
            k3 = dt * FS(r0 + k2/2.0, t[i] + dt/2.0, p, I, ge, gc, K)
            k4 = dt * FS(r0 + k3, t[i] + dt, p, I, ge, gc, K)
            r0 = r0 + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6.0

        M = np.array(M)
        x1, x2, x3, x4, x5 = M[:, 0], M[:, 3], M[:, 6], M[:, 9], M[:, 12]

        # Calculate SNRs
        snr_results = [calculate_snr(x) for x in [x1, x2, x3, x4, x5]]

        # Format beta for titles
        beta_potencia = format_beta_power(beta)

        # Plot individual neuron time series and spectra
        neuron_data = [x1, x2, x3, x4, x5]
        colors = ['black', 'red', 'orange', 'green', 'purple']
        titles = [
            f'Série temporal e espectro de frequência do neurônio 1 com $I_0$ = {I0}, $g_e$ = {g_e}$',
            f'Série temporal e espectro de frequência do neurônio 2 com $I_0$ = {I0}, $g_e$ = {g_e}$',
            f'Série temporal e espectro de frequência do neurônio 3 com $I_0$ = {I0}, $g_e$ = {g_e}$',
            f'Série temporal e espectro de frequência do neurônio 4 com $I_0$ = {I0}, $g_e$ = {g_e}$',
            f'Série temporal e espectro de frequência do neurônio 5 com $I_0$ = {I0}, $g_e$ = {g_e}$'
        ]

        for i, (x, color, title) in enumerate(zip(neuron_data, colors, titles), start=1):
            fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(2, 1, figsize=(18, 9))

            # Time series
            ax1.plot(t, x, color=color)
            ax1.set_title(title, fontsize=16)

```

```

ax1.set_ylabel('Amplitude')
ax1.grid(True)

freqs = np.fft.fftshift(np.fft.fftfreq(len(x), dt))
fft_x = np.abs(np.fft.fftshift(np.fft.fft(x)))
ax2.plot(freqs, fft_x, color=color)
ax2.set_xlim(0, 1)
ax2.set_yscale('log')
ax2.set_xlabel('Frequência (Hz)')
ax2.set_ylabel('Amplitude (log)')
ax2.grid(True)

plt.tight_layout()
plt.savefig(os.path.join(output_folder, f'Série e espectro de neurônio_{i}_beta_
plt.close()

# Plot combined time series
fig, axs = plt.subplots(5, 1, figsize=(18, 9), sharex=True)
for j, ax in enumerate(axs):
    ax.plot(t, neuron_data[j], color=colors[j], label=f'Neurônio {j+1}')
    ax.legend(loc='upper right')
    ax.grid(True)
    ax.set_ylabel('Amplitude')

axs[-1].set_xlabel('Tempo')
# Aumentar o tamanho do título principal (use fontsize entre 16-20 para maior v:
plt.suptitle(f'Série temporal dos cinco neurônios com  $I_0 = \{I_0\}$ ,  $g_e = \{g_e\}$ 
             fontsize=16)
plt.xlim(4000, 8000)

plt.tight_layout()
plt.savefig(os.path.join(output_folder, f'Todas_Series_beta_{beta:.0e} - LOOP.pr
plt.close()

# Save results
file.write(f"{beta:.1e}\t" + "\t".join(f"{snr:.2f}" for snr in snr_results) + "\n")

print("Simulation completed successfully!")

```

```

# -*- coding: utf-8 -*-
"""
@author: silif
"""

import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd

# Valores resumidos
beta_values = [0.0e+00, 1.0e-03, 1.0e-02, 1.0e-01, 1.0e+00]
# Valores resumidos
beta_values = [0.0e+00, 1.0e-03, 1.0e-02, 1.0e-01, 1.0e+00]
snr_values = [
    [131.67, 131.67, 131.67, 131.67, 131.67], #  $\beta = 0.0e+00$ 
    [90.17, 114.61, 132.91, 135.21, 136.67], #  $\beta = 1.0e-03$ 
    [70.38, 71.57, 82.46, 89.38, 66.47], #  $\beta = 1.0e-02$ 
    [50.41, 67.53, 81.79, 83.74, 65.13], #  $\beta = 1.0e-01$ 
    [30.50, 53.79, 73.03, 72.71, 61.54], #  $\beta = 1.0e+00$ 
]

# Criando DataFrame
df = pd.DataFrame(snr_values, columns=["Neurônio 1", "Neurônio 2", "Neurônio 3", "Neurônio 4", "Neurônio 5"],
df["Beta"] = beta_values

# Lista de cores para cada neurônio
colors = ['black', 'red', 'orange', 'green', 'purple']

# Plotando o gráfico
plt.figure(figsize=(18, 9))
for neuron, color in zip(["Neurônio 1", "Neurônio 2", "Neurônio 3", "Neurônio 4", "Neurônio 5"],
    plt.plot(df["Beta"], df[neuron], marker='o', label=neuron, color=color)

plt.xlabel("Beta ( $\beta$ )")
plt.ylabel("SNR")
# plt.ylim(30, 60)

plt.title("SNR em função de  $\beta$  para cada neurônio")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.xscale("log")
plt.tight_layout()
plt.show()

```

```

# -*- coding: utf-8 -*-
"""
@author: silif
"""

import os
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import signal

# Criar pasta de resultados
pasta_resultados = 'RESULTADOS 5N correlacao sem ruido'
os.makedirs(pasta_resultados, exist_ok=True)

def FS(r0, t, p, I, ge, gc, K):
    def F(r, t, p, I):
        a, b, c, d, rr, S, x0 = p
        x, y, z = r
        dx = y - a * x**3 + b * x**2 + I - z
        dy = c - d * x**2 - y
        dz = -rr * z + rr * S * (x - x0)
        return np.array([dx, dy, dz])

    r1 = r0[0:3]
    r2 = r0[3:6]
    r3 = r0[6:9]
    r4 = r0[9:12]
    r5 = r0[12:15]

    I1, I2, I3, I4, I5 = I

    dr1 = F(r1, t, p, I1)
    # dr2 = F(r2, t, p, I2) + ge * np.dot(K, r1 - r2) + gc * np.dot(K, ((r2 - 2.0) / (1 + np.exp(
    dr2 = F(r2, t, p, I2) + ge * np.dot(K, r1 - r2) + gc * np.dot(K, ((r2 - 2.0) / (1 + np.exp(
    dr3 = F(r3, t, p, I3) + ge * np.dot(K, r2 - r3) + gc * np.dot(K, ((r3 - 2.0) / (1 + np.exp(
    dr4 = F(r4, t, p, I4) + ge * np.dot(K, r3 - r4) + gc * np.dot(K, ((r4 - 2.0) / (1 + np.exp(
    dr5 = F(r5, t, p, I5) + ge * np.dot(K, r4 - r5) + gc * np.dot(K, ((r5 - 2.0) / (1 + np.exp(

    return np.append(dr1, [dr2, dr3, dr4, dr5])

def plot_correlacao_cruzada(x, y, rotulo_x, rotulo_y, dt, pasta_salvar='RESULTADOS'):
    """Calcula, plota e salva a correlação cruzada entre dois sinais"""
    # Normalizar dados
    x_norm = (x - np.mean(x)) / np.std(x)
    y_norm = (y - np.mean(y)) / np.std(y)

    # Calcular correlação cruzada
    correlacao = signal.correlate(x_norm, y_norm, mode='full')
    lags = signal.correlation_lags(len(x_norm), len(y_norm), mode='full') * dt
    lags_selecionados = (lags >= 1000) & (lags <= 3000)
    normalizacao = max(len(x), len(y)) - np.abs(lags)
    correlacao = correlacao / normalizacao

    # Encontrar pico principal
    indice_pico = np.argmax(np.abs(correlacao))
    lag_pico = lags[indice_pico]
    valor_pico = correlacao[indice_pico]

    # Criar gráfico
    plt.figure(figsize=(10, 5))
    plt.plot(lags[lags_selecionados], correlacao[lags_selecionados], label='Correlação cruzada')

```

```

plt.axvline(lag_pico, color='red', linestyle='--', label=f'Pico (Lag={lag_pico:.2f})')
plt.title(f'{rotulo_x} vs {rotulo_y}')
plt.xlabel('Atraso (tempo)')
plt.ylabel('Correlação Normalizada')
plt.legend()
plt.grid()

# Salvar figura
nome_arquivo = os.path.join(pasta_salvar, f'correlacao_{rotulo_x}_vs_{rotulo_y}.png')
plt.savefig(nome_arquivo, bbox_inches='tight', dpi=300)
plt.close()

print(f"Gráfico salvo em: {nome_arquivo}")
print(f"Correlação entre {rotulo_x} e {rotulo_y}:")
print(f" → Pico em Lag = {lag_pico:.2f}, Valor = {valor_pico:.2f}\n")

# Parâmetros da simulação
N = 10000
dt = 0.1
t = np.arange(0, N, dt)
Nn = 5
r0 = 0.0 * np.random.uniform(0.0, 1.0, 15)

# Parâmetros do modelo
a, b, c, d = 1.0, 3.0, 1.0, 5.0
rr, S, x0 = 0.005, 4.0, -1.6
I0 = 1.35
p = [a, b, c, d, rr, S, x0]
K = np.diag([1, 0, 0])
ge = 1.0
gc = 0.0
beta = 0.0 # Intensidade do ruído

# Simulação
arquivo_saida = os.path.join(pasta_resultados, 'resultados_snr_loop.txt')
M = []

with open(arquivo_saida, 'w') as arquivo:
    arquivo.write('Iteração\tSNR(dB) Neurônio 1\tSNR(dB) Neurônio 2\tSNR(dB) Neurônio 3\tSNR(dB)')
    arquivo.write('-' * 100 + '\n')

    for i in range(len(t)):
        M.append(r0)

        # Correntes com ruído (apenas no Neurônio 1)
        I1 = I0 + 0.1 * np.sin(2 * np.pi * 0.1 * t[i]) + beta * np.random.normal(0, 1)
        I2 = I0 + 0.1 * np.sin(2 * np.pi * 0.1 * t[i] + np.pi/4)
        I3 = I0 + 0.1 * np.sin(2 * np.pi * 0.1 * t[i] + np.pi/2)
        I4 = I0 + 0.1 * np.sin(2 * np.pi * 0.1 * t[i] + 3*np.pi/4)
        I5 = I0 + 0.1 * np.sin(2 * np.pi * 0.1 * t[i] + np.pi)

        r0 = r0 + dt * FS(r0, t[i], p, [I1, I2, I3, I4, I5], ge, gc, K)

        if i % 100 == 0:
            arquivo.write(f'{i}\t{10*np.log10(np.var(r0[0:3])/np.var(r0[3:6]))}\t'
                          f'{10*np.log10(np.var(r0[1:4])/np.var(r0[4:7]))}\t'
                          f'{10*np.log10(np.var(r0[2:5])/np.var(r0[5:8]))}\t'
                          f'{10*np.log10(np.var(r0[3:6])/np.var(r0[6:9]))}\t'
                          f'{10*np.log10(np.var(r0[4:7])/np.var(r0[7:10]))}\n')

# Usar estilo padrão (sem fundo cinza)

```

```

plt.style.use('default')

# Cores desejadas para os gráficos
cores = ['black', 'red', 'green', 'orange', 'purple']

# Gráficos das séries temporais
plt.figure(figsize=(18, 9))
for i in range(5):
    plt.subplot(5, 1, i+1)
    plt.plot(t, [r[i*3] for r in M], color=cores[i]) # Aplicar cor correspondente
    plt.title(f'Neurônio {i+1}')
    plt.xlim(2000, 4000)
    plt.ylabel('Amplitude')
    if i == 4:
        plt.xlabel('Tempo', fontsize=12) # Apenas no último subplot    plt.grid(True, alpha=0.3)

# Título geral da figura
plt.suptitle(f'Séries temporais dos cinco neurônios com  $I_0 = 1.35$ ,  $g_e = \{g_e\}$  e  $g_c = \{g_c\}$ ',
             fontsize=16)

# Ajuste do layout (com espaço para o título)
plt.tight_layout(rect=[0, 0, 1, 0.96]) # "rect" evita que o supitle sobreponha os subplots

plt.tight_layout()
plt.savefig(os.path.join(pasta_resultados, 'series_temporais.png'), dpi=300)
plt.close()

# Configurar estilo dos gráficos
plt.style.use('seaborn')
plt.rcParams.update({'font.size': 12})

# Dados dos neurônios (já calculados na simulação)
dados_neuronios = {
    'Neurônio 1': np.array([r[0] for r in M]),
    'Neurônio 2': np.array([r[3] for r in M]),
    'Neurônio 3': np.array([r[6] for r in M]),
    'Neurônio 4': np.array([r[9] for r in M]),
    'Neurônio 5': np.array([r[12] for r in M])
}

# Lista de neurônios
neuronios = list(dados_neuronios.keys())
n_neuronios = len(neuronios)

# # Criar figura grande para todos os pares
# plt.figure(figsize=(20, 16))

# # Gerar todos os pares possíveis
# for i in range(n_neuronios):
#     for j in range(i+1, n_neuronios):
#         # Calcular índice do subplot (matriz triangular inferior)
#         idx = (j-1)*n_neuronios + i + 1
#         plt.subplot(n_neuronios, n_neuronios, idx)

#         # Plotar xi vs xj
#         plt.plot(dados_neuronios[neuronios[i]],
#                  dados_neuronios[neuronios[j]],
#                  'b-', alpha=0.5, linewidth=0.8)

```

```

#         # Configurações do gráfico
#         plt.xlabel(f'{neuronios[i]}')
#         plt.ylabel(f'{neuronios[j]}')
#         plt.grid(True, alpha=0.3)

#         # Adicionar linha de identidade para referência
#         lim_min = min(plt.xlim()[0], plt.ylim()[0])
#         lim_max = max(plt.xlim()[1], plt.ylim()[1])
#         plt.plot([lim_min, lim_max], [lim_min, lim_max], 'r--', alpha=0.3)

# # Ajustar layout
# plt.suptitle(f'Relações de Fase entre Todos os Pares de Neurônios com  $I_0 = 1.35$ ,  $g_e = \{$ 
# plt.tight_layout()

# # Salvar figura
# plt.savefig(os.path.join(pasta_resultados, 'todos_pares_fase.png'),
#             dpi=300, bbox_inches='tight')
# plt.close()

# # Versão alternativa: Gráficos individuais para cada par
# for i in range(n_neuronios):
#     for j in range(i+1, n_neuronios):
#         plt.figure(figsize=(8, 6))

#         # Plot com coloração temporal
#         plt.scatter(dados_neuronios[neuronios[i]],
#                     dados_neuronios[neuronios[j]],
#                     c=np.arange(len(M)), cmap='viridis',
#                     alpha=0.7, s=1)

#         # Linha de identidade
#         lims = [np.min([dados_neuronios[neuronios[i]], dados_neuronios[neuronios[j]]]),
#                 np.max([dados_neuronios[neuronios[i]], dados_neuronios[neuronios[j]]])]
#         plt.plot(lims, lims, 'r--', alpha=0.5)

#         # Configurações
#         plt.xlabel(f'Atividade {neuronios[i]}')
#         plt.ylabel(f'Atividade {neuronios[j]}')
#         plt.title(f'Relação de Fase: {neuronios[i]} vs {neuronios[j]} com  $I_0 = 1.35$ ,  $g_e = \{$ 
#         plt.grid(True, alpha=0.3)
#         plt.colorbar(label='Passo Temporal')

#         # Salvar individualmente
#         plt.savefig(os.path.join(pasta_resultados,
#                                 f'fase_{neuronios[i]}_vs_{neuronios[j]}.png'),
#                     dpi=300, bbox_inches='tight')
#         plt.close()

# print("Gráficos de fase para todos os pares foram salvos em:", pasta_resultados)

# Configurações do plot
plt.figure(figsize=(20, 20))
plt.style.use('seaborn')
plt.rcParams.update({'font.size': 10})

# Número de neurônios
n = len(neuronios)

# Criar uma matriz de subplots (somente a parte triangular inferior)
for i in range(n):

```

```

for j in range(n):
    if i > j: # Somente abaixo da diagonal principal
        ax = plt.subplot(n-1, n-1, (i-1)*(n-1) + j + 1)

        # Plot com coloração temporal
        sc = ax.scatter(dados_neuronios[neuronios[j]],
                        dados_neuronios[neuronios[i]],
                        c=np.arange(len(M)), cmap='viridis',
                        alpha=0.7, s=1)

        # Linha de identidade
        lims = [min(ax.get_xlim()[0], ax.get_ylim()[0]),
                max(ax.get_xlim()[1], ax.get_ylim()[1])]
        ax.plot(lims, lims, 'r--', alpha=0.3, linewidth=1)

        # Configurações dos eixos
        if i == n-1:
            ax.set_xlabel(neuronios[j])
        if j == 0:
            ax.set_ylabel(neuronios[i])
        ax.grid(True, alpha=0.2)

        # Remover ticks para melhorar a visualização
        ax.set_xticks([])
        ax.set_yticks([])

# Adicionar barra de cores única
cax = plt.axes([0.92, 0.15, 0.02, 0.7])
plt.colorbar(sc, cax=cax, label='Passo Temporal')

# Título geral
plt.suptitle(f'Relações de Fase entre Todos os Pares de Neurônios com  $I_0 = 1.35$ ,  $g_e = \{g_e\}$ '
             y=0.92, fontsize=16)

# Ajustar layout
plt.tight_layout(rect=[0, 0, 0.9, 0.95])

# Salvar figura
plt.savefig(os.path.join(pasta_resultados, 'matriz_fase_todos_pares.png'),
            dpi=300, bbox_inches='tight')
plt.close()

print("Matriz de gráficos de fase salva em:", os.path.join(pasta_resultados, 'matriz_fase_todos_

```